

LUISS Guido Carli
PREMIO TESI D'ECCELLENZA

**Replica statica
delle opzioni**
Luca Sebastiani

7
2015-2016

LUISS Guido Carli / Premio tesi d'eccellenza
Working paper n. 7/2015-2016
Publication date: November 2017
Replica statica delle opzioni
© 2017 Luca Sebastiani
ISBN 978-88-6856-118-5

This working paper is distributed for purposes of comment and discussion only. It may not be reproduced without permission of the copyright holder.

LUISS Academy is an imprint of
LUISS University Press – Pola Srl
Viale Pola 12, 00198 Roma
Tel. 06 85225485
e-mail lup@luiss.it
www.luissuniversitypress.it

Editorial Committee:

Leonardo Morlino (chair)
Paolo Boccardelli
Matteo Caroli
Giovanni Fiori
Daniele Gallo
Nicola Lupo
Stefano Manzocchi
Giuseppe Melis
Marcello Messori
Gianfranco Pellegrino
Giovanni Piccirilli
Arlo Poletti
Andrea Prencipe
Pietro Reichlin

Replica statica delle opzioni

Luca Sebastiani

Abstract

La replica statica nasce negli anni novanta, in risposta ad alcuni dei problemi riscontrati sul piano pratico dall'applicazione del «classico» approccio di replica dinamica, sul quale si fondano le moderne teorie di *options pricing*. In generale, prevede la costruzione di un portafoglio di opzioni o altri strumenti detenuti in quantità fisse durante l'intera durata del periodo di copertura. I modelli di *static replication* consentono di determinare i pesi statici che garantiscono l'uguaglianza tra il valore del portafoglio e il valore dell'opzione target, al variare del tempo residuo alla scadenza e del prezzo del titolo sottostante. Le strategie di replica statica possono pertanto essere impiegate per individuare il *fair price* o per effettuare l'*hedging* di vari tipi di opzioni. Il presente lavoro si focalizza sulle opzioni ordinarie, *plain vanilla* ed esotiche, e sulle opzioni con barriera. Lo scopo della ricerca è di analizzare i modelli e le strategie di replica statica esistenti, per effettuare un confronto con le tecniche di copertura dinamica, estenderne ed ottimizzarne l'utilizzo e testarne empiricamente il funzionamento.

Introduzione

La replica statica delle opzioni finanziarie viene introdotta per la prima volta negli anni novanta, attraverso una serie di *working papers* seminali che contribuiscono significativamente al successivo sviluppo e alla diffusione della materia. Derman, Ergener e Kani – ad esempio – pubblicano nel 1995 uno dei primi e più rilevanti lavori sul tema, fornendo anche una definizione generale per il nuovo approccio da loro proposto:

«...to construct a replicating portfolio of standard options with varying strikes and maturities and fixed portfolio weights. Once constructed, this portfolio will replicate the value of the target option for a wide range of stock prices and times before expiration, without requiring further weight adjustments. We call this method static replication.»

L'idea di base è semplice: si costruisce un portafoglio di opzioni standard¹, con scadenze e/o prezzi d'esercizio differenti. Una volta stabilite le quantità di ciascuna opzione di replica da acquistare o da vendere in funzione della strategia impiegata, i pesi del portafoglio di copertura vengono mantenuti invariati (ovvero, statici) fino al termine del periodo di *hedging*. Il valore del portafoglio così definito risulta in grado di replicare il valore corrente dell'opzione target, al variare del prezzo del sottostante e della vita residua dello strumento.

La replica statica nasce in risposta ad alcuni dei problemi riscontrati sul piano pratico dall'applicazione del «classico» approccio di replica dinamica, sul quale si fondano le moderne teorie di *options pricing* (Merton, 1973). In particolare, l'elevato impatto dei costi di transazione, l'incapacità di considerare adeguatamente e globalmente i diversi fattori di rischio e la difficoltà di implementazione per alcuni tipi di opzioni esotiche (e.g., opzioni con barriera) hanno portato i *traders* a sviluppare metodi di copertura alternativi, che eliminassero o riducessero la portata degli effetti negativi dovuti ai limiti menzionati. I modelli di *static replication* consentono di risolvere efficacemente questi aspetti critici, e costituiscono quindi uno strumento essenziale a disposizione degli investitori tanto in un'ottica di *pricing* quanto e soprattutto di *risk management* dell'opzione target.

Con riferimento alla letteratura esistente, la maggior parte dei contributi sul tema si focalizza sulla replica delle opzioni con barriera; la ragione è da ricercarsi nella singolare natura di questi derivati, che si rivela incompatibile con l'applicazione delle strategie di copertura dinamica, mentre risulta particolarmente adatta ad essere trattata staticamente. Oltre ai già citati Derman, Ergener e Kani (1994), che sviluppano un approccio denominato «*Maturity-spread*», Bowie e Carr (1994) e Carr, Ellis e Gupta

¹ Alcuni degli approcci alternativi alla strategia di replica statica proposta da Derman, Ergener e Kani prevedono il coinvolgimento di altri tipi di strumenti, quali *forward*, *futures* e opzioni esotiche.

(1998) propongono una serie di interessanti strategie, basate sulla relazione di *Put-Call Symmetry* tra i prezzi di opzioni europee standard scritte sullo stesso sottostante. Carr e Chou (1997) elaborano un modello «*Strike-spread*», molto efficace e che consente di sfruttare la molteplicità di prezzi d'esercizio normalmente disponibile (specialmente per opzioni quotate su mercati regolamentati) nella costruzione del portafoglio di copertura. Per quanto riguarda invece la replica di opzioni ordinarie, si fa riferimento ai *papers* di Carr e Wu (2002) e Wu e Zhu (2011), che suggeriscono tecniche specifiche per la replica statica di opzioni *calls* e *puts* europee *plain vanilla*.

L'obiettivo della tesi è stato analizzare ed approfondire i modelli preesistenti, allo scopo di individuarne gli aspetti chiave e gli eventuali punti di forza e debolezza, per poterne poi estendere l'applicazione ad altri tipi di strumenti (i.e., opzioni esotiche) o per proporre ulteriori ottimizzazioni alle strategie originali sviluppate dagli autori. Inoltre, sono stati effettuati una serie di esperimenti su dati storici, al fine di determinare l'efficacia e il funzionamento degli approcci di replica statica in un contesto reale. In questa sede, vengono presentati i risultati più rilevanti del lavoro.

Nel primo capitolo si propongono delle estensioni alle strategie di Carr e Wu (2002) e Wu e Zhu (2011), rispettivamente per opzioni asiatiche geometriche e per opzioni di scambio. Al termine del capitolo, si effettua un'analisi empirica dei due modelli originali sfruttando le quotazioni storiche delle *SPX Options* quotate sul CBOE.

Il secondo capitolo affronta la replica statica delle opzioni con barriera. Viene riconsiderato l'utilizzo dell'approccio *Maturity-spread* di Derman, Ergener e Kani (1994) in un'ottica di *pricing* per opzioni con barriera discrete, mentre per l'approccio *Strike-spread* di Carr e Chou (1997) viene sviluppata un'ottimizzazione della strategia originale, allo scopo di definire una spaziatura ottimizzata tra i prezzi d'esercizio delle opzioni di copertura. In chiusura del capitolo, vengono proposte altre esemplificazioni pratiche sullo stesso *dataset* di *SPX Options* utilizzato nel Capitolo 1, per valutare il funzionamento delle tecniche analizzate.

Nell'ultima sezione si conclude il lavoro, commentando l'analisi svolta e i risultati acquisiti.

Capitolo 1

Replica Statica delle Opzioni Ordinarie

La replica delle opzioni «ordinarie» (i.e., opzioni *plain vanilla* e opzioni esotiche senza barriera) viene effettuata generalmente facendo ricorso alle tradizionali metodologie di copertura dinamica, come il *delta hedging* o il *delta-gamma hedging*. L'assenza della barriera semplifica notevolmente il lavoro dei *traders*, sebbene la necessità di effettuare frequenti ribilanciamenti in portafoglio comporti un aumento dell'*hedging error* (dovuto, in genere, alla presenza di costi di transazione); inoltre, le strategie di *dynamic replication* non riescono a catturare in maniera efficace tutti i fattori di rischio ai quali è soggetta l'opzione target.

Le tecniche di replica statica possono aiutare a risolvere questi problemi e possono rivelarsi anche utili per definire il *fair price* di alcune opzioni: la ben nota relazione di *Put-Call Parity*, ad esempio, mette in rapporto tra loro i prezzi di *puts* e *calls* europee *plain vanilla*. Le «opzioni a scelta» (*chooser options*) sono replicabili in maniera esatta – in assenza di opportunità di arbitraggio – tramite un portafoglio di opzioni standard.

Per tali ragioni è senz'altro utile, oltre che interessante, approfondire questo argomento.

Il Modello di Wu e Zhu (2011)

In sintesi, il modello sviluppato dai professori Liuren Wu e Jingyi Zhu prevede la costruzione di un portafoglio di copertura sfruttando quelli che gli autori chiamano «*nearby contracts*», ovvero strumenti che condividono la stessa natura dell'opzione target. L'idea fondamentale alla base della strategia è che opzioni simili saranno esposte agli stessi fattori di rischio, consentendo pertanto di realizzare una replica completa ed efficace.

Wu e Zhu applicano il proprio modello alle opzioni *call plain vanilla* europee¹, per le quali illustrano diversi possibili scenari, e testano la validità della tecnica conducendo una serie di simulazioni su dati storici.

La strategia prevede la costruzione di un portafoglio di replica per l'opzione target (K, T) ² attraverso tre diverse opzioni di replica: un'opzione *down* (K_d, T_0) , un'opzione *up* (K_u, T_0) e un'opzione *centre* (K_c, T_c) ; si ha inoltre che $K_d < K_c < K_u$ e $T_0 \neq T_c$. Gli autori definiscono questa particolare conformazione «triangolo di copertura» (si veda la Figura 1.1).

Il modello definisce quindi, a partire dai prezzi d'esercizio e dalle scadenze dei quattro strumenti coinvolti, i pesi statici ottimali da assegnare a ciascuna delle opzioni di replica (w_d , w_u e w_c) per costruire il portafoglio.

¹ L'estensione ad opzioni *put* risulta immediata, sebbene non venga esplicitamente trattata nel *paper* dagli autori.

² Con K si indica il prezzo d'esercizio mentre con T si indica la scadenza dello strumento.

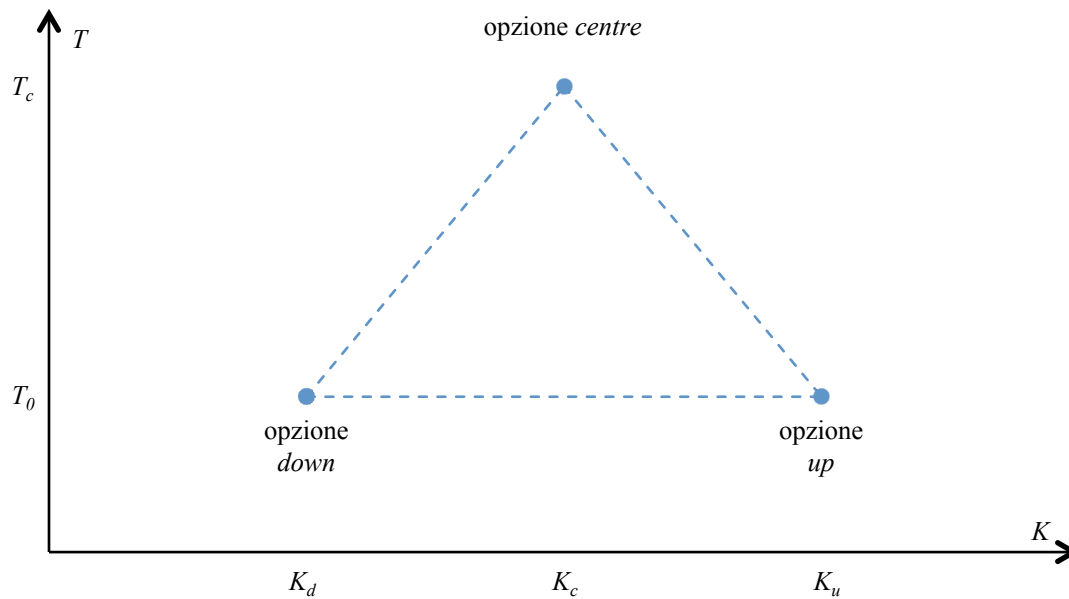


Figura 1.1 Esempio di triangolo con $T_c > T_0$.

Il sistema da risolvere – espresso in forma matriciale – è il seguente:

$$\begin{bmatrix} w_d \\ w_c \\ w_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ K_d & K_c & K_u \\ d_d^2 & d_c^2 - \alpha & d_u^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ K \\ 1 \end{bmatrix}$$

dove,

$$d_i = \frac{(K_i - K)}{K \sigma(K, T_0) \sqrt{T - T_0}}$$

$$\alpha = \frac{T_0 - T_c}{T - T_0}$$

Il parametro $\sigma(K, T_0)$ esprime la volatilità locale del sottostante. Partendo dal *framework* originale, è stato possibile operare un'estensione del modello per replicare staticamente opzioni di scambio: la derivazione e l'analisi sono presentati nella sezione successiva.

Estensione del modello: Opzioni di Scambio

Le opzioni di scambio (*exchange options*) sono opzioni esotiche che conferiscono all'acquirente il diritto di scambiare tra loro due asset alla scadenza, molto utilizzate ad esempio per le transazioni in valuta. Le strategie dinamiche che consentono di replicare questi strumenti prevedono la costruzione di un portafoglio contenente quantità variabili del titolo privo di rischio e dei due *underlyings*: pertanto, rispetto all'*hedging* di un'opzione europea *plain vanilla* l'impatto dei costi di transazione risulta più elevato.

Uno dei più diffusi modelli di valutazione per le opzioni di scambio è stato sviluppato da William Margrabe (1978) e riprende molte delle caratteristiche già presenti in Black, Scholes e Merton. La formula di riferimento è la seguente:

$$EX_t = S_t e^{-q_S(T-t)} N(d_1) - K_t e^{-q_K(T-t)} N(d_2)$$

con,

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K_t) + (q_K - q_U + \hat{\sigma}^2/2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_K^2 + \sigma_S^2 - 2\rho\sigma_K\sigma_S}$$

Dove i due titoli sottostanti (il cui prezzo corrente viene identificato rispettivamente da S_t e K_t) sono caratterizzati da diversi livelli di volatilità (σ_S e σ_K), diversi tassi di dividendo (q_S e q_K) ed hanno un coefficiente di correlazione comune pari a ρ .

Per applicare il modello di Wu e Zhu alle *exchange options* è necessario modificare il triangolo per adattarlo alle caratteristiche specifiche di questi derivati. In particolare, non essendo possibile fissare il prezzo di esercizio di un'opzione di scambio³, si ottiene $K=K_d=K_u=K_c=K_t$. Le uniche variabili a disposizione del *trader* sono quindi soltanto le scadenze delle opzioni di copertura: T_0 e T_c . Poiché in questa nuova struttura l'opzione *up* e l'opzione *down* coincidono ($K_u=K_d$), il triangolo «collassa» e il portafoglio di replica si compone di due opzioni; il sistema da risolvere per ottenere i pesi statici ottimali, presentato nella sezione precedente, si adatta di conseguenza, imponendo semplicemente l'uguaglianza tra i prezzi d'esercizio dei diversi strumenti coinvolti.

La strategia assume dunque connotati diversi rispetto alla versione originale di Wu e Zhu, ma non risulta per questo meno efficace. Per testarne il funzionamento, la Tabella 1.1 riporta i risultati ottenuti attraverso una simulazione di copertura statica per un'opzione di scambio. Per questo esempio si è scelto di replicare un'opzione target caratterizzata da $T=1$ anno, scritta su due sottostanti con diversi livelli di volatilità ($\sigma_S=20\%$ e $\sigma_K=15\%$) e diversi tassi di dividendo ($q_S=2\%$ e $q_K=1\%$); il coefficiente di correlazione comune (ρ) è assunto pari a 0,3. Le *exchange options* di replica hanno scadenze differenti, $T_0=6$ mesi e $T_c=1$ anno e mezzo. Entrambi i sottostanti – in linea con il modello di valutazione di Margrabe – seguono un moto Browniano geometrico le cui rispettive componenti stocastiche co-muovono nel tempo.

³ Non esiste di fatto un vero *strike price* per l'opzione di scambio: i prezzi dei due sottostanti vengono confrontati alla scadenza per determinare il valore implicito dello strumento.

<i>Giorno</i>	S_t	K_t	EX_{Target}	EX_0	EX_c	<i>Portafoglio di Replica</i>	<i>Ratio</i>	<i>Portafoglio Ottimizzato</i>
0	100	100	7,79	5,66	9,33	7,49	0,96	7,79
1	99,86	99,44	7,95	5,82	9,49	7,66	0,96	7,96
2	100,13	98,65	8,44	6,32	9,96	8,14	0,96	8,47
3	97,98	97,98	7,59	5,48	9,11	7,29	0,96	7,58
4	98,12	99,44	7,03	4,89	8,58	6,73	0,96	7,00
5	98,69	98,91	7,52	5,38	9,07	7,22	0,96	7,51
6	98,28	100,81	6,53	4,37	8,10	6,23	0,96	6,48
7	98,47	100,06	6,91	4,73	8,47	6,60	0,96	6,86
8	97,08	99,68	6,39	4,23	7,94	6,08	0,96	6,32
9	97,75	99,23	6,87	4,69	8,42	6,56	0,96	6,82
10	98,95	99,01	7,54	5,36	9,10	7,23	0,96	7,52
11	97,17	98,71	6,77	4,60	8,32	6,46	0,96	6,72
12	96,27	98,85	6,27	4,11	7,82	5,97	0,96	6,20
13	96,01	99,12	6,04	3,87	7,59	5,73	0,96	5,96
14	94,88	99,64	5,34	3,22	6,88	5,05	0,96	5,25
15	95,97	100,03	5,66	3,49	7,22	5,35	0,96	5,57
16	96,06	102,15	4,96	2,83	6,52	4,67	0,96	4,86
17	94,47	101,16	4,64	2,56	6,17	4,37	0,96	4,54
18	95,01	100,67	4,99	2,86	6,54	4,70	0,96	4,89
19	94,31	99,66	5,03	2,90	6,58	4,74	0,96	4,93
20	93,71	97,69	5,45	3,30	6,99	5,15	0,96	5,35
21	94,67	97,66	5,87	3,67	7,43	5,55	0,96	5,77

Tabella 1.1 Esempificazione di triangolo per la replica di un'opzione di scambio.

Come si evince dall'osservazione della Tabella 1.1, l'evoluzione del valore del portafoglio di replica ottimizzato (ultima colonna) segue molto da vicino il prezzo dell'opzione di scambio target (quarta colonna). Le quantità w_0 e w_c definite in $t=0$ vengono utilizzate inizialmente per definire il portafoglio (settima colonna) e mantenute invariate per l'intero periodo di copertura (21 giorni lavorativi). I pesi vengono inoltre riponderati in funzione del rapporto tra il valore del triangolo e il valore dell'opzione target (pari a 96%, come mostrato nell'ottava colonna), in modo da garantire una coincidenza esatta all'inizio dell'*hedging period*.

Il modello di Wu e Zhu può essere quindi impiegato per replicare staticamente opzioni di scambio, con un doppio vantaggio rispetto all'applicazione ad opzioni *plain vanilla* sviluppata da Wu e Zhu: una sensibile riduzione dei costi di transazione in confronto alle strategie di copertura dinamica e la possibilità di ottenere ottimi risultati utilizzando due sole opzioni nella costruzione del triangolo.

Il modello di Carr e Wu (2002)

Peter P. Carr e Liuren Wu hanno sviluppato nel 2002 un sofisticato modello di replica statica per opzioni *plain vanilla* europee. Diversamente dalla strategia proposta da Wu e Zhu, il metodo in analisi si caratterizza per una struttura più rigida, un maggior numero di assunzioni (tra le quali, la necessità di definire un modello di valutazione di riferimento) e in generale una maggiore complessità in fase di implementazione. Nonostante i limiti menzionati, il modello si dimostra comunque estremamente efficace e funzionale, tanto sul piano teorico quanto sul piano pratico, come dimostrano gli studi condotti dagli autori del *paper*.

In breve, la tecnica permette di costruire un portafoglio statico di N opzioni di replica, con N liberamente determinato dal *trader*. Le opzioni in portafoglio hanno scadenza uguale tra loro ma sempre inferiore rispetto al target, mentre i prezzi d'esercizio sono tutti differenti e vengono stabiliti in maniera endogena dal modello, in funzione delle variabili definite e delle assunzioni sottostanti.

Partendo, anche in questo caso, dal lavoro originale di Carr e Wu, la struttura della strategia è stata modificata per poterne estendere l'utilizzo alla copertura statica delle opzioni asiatiche geometriche.

Estensione del modello: Opzioni Asiatiche

Le opzioni asiatiche sono opzioni esotiche di tipo *path-dependent*, che pagano al compratore alla scadenza la differenza tra la media dei prezzi del sottostante (nel periodo e con la frequenza di osservazione stabiliti contrattualmente) e il prezzo d'esercizio. Le opzioni asiatiche più diffuse e negoziate sono quelle che utilizzano come misura di riferimento la media aritmetica dei prezzi dell'*underlying*. Tuttavia, la media geometrica ha il pregio di essere più facile da trattare e da modellizzare, perché conserva lo stesso tipo di distribuzione del sottostante (e.g., log-normale). A livello pratico, le due misure sono quasi identiche: di conseguenza, l'analisi delle opzioni geometriche si può ritenere in buona approssimazione valida anche per le corrispondenti opzioni aritmetiche.

L'idea di estendere il modello di Carr e Wu (2002) alle *asian options* era già stata presentata da Wang, Shen e Qian in un lavoro del 2015, nel quale gli autori dimostrano come sia possibile modificare la strategia originale per poterla adattare all'*hedging* di questi strumenti esotici. Riprendendo alcuni degli aspetti chiave del *paper*, in questa sezione si sviluppa ed esamina un'estensione alternativa della tecnica di Carr e Wu per le opzioni asiatiche geometriche. Il *framework* di riferimento è il modello di Kemna e Vorst (1990), che permette di calcolare il prezzo di un'opzione geometrica con frequenza di osservazione continua. La scelta di utilizzare questo particolare modello è dovuta alla sua semplicità e alla struttura della funzione di *pricing*, che rispetta i criteri necessari per essere trattata nell'ambito della strategia in analisi. Inoltre, dal momento

che la media aritmetica di una qualsiasi variabile è sempre maggiore o uguale alla corrispondente media geometrica, incrementare la frequenza di osservazione ($n \rightarrow \infty$) fa sì che quest'ultima aumenti, riducendo ulteriormente la distanza tra le due misure. Pertanto, il metodo che viene illustrato in questa sede si può considerare valido per l'*hedging* di opzioni asiatiche geometriche e aritmetiche.

La formula di Kemna e Vorst per calcolare il prezzo corrente di una *Geometric Asian Call (GAC)* è la seguente:

$$GAC_t = e^{-r(T-t)} [S_t e^{M+0,5V} N(d_1) - KN(d_2)]$$

dove,

$$M = (r - q - 0,5\sigma^2) [(T_0 - t) + 0,5(T - T_0)] \quad V = \sigma^2 \left[T_0 - t + \frac{(T - T_0)}{3} \right]$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + M + V}{\sqrt{V}} \quad d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + M}{\sqrt{V}}$$

La variabile T_0 rappresenta la data iniziale del periodo di osservazione: la media viene quindi calcolata in base ai prezzi del sottostante rilevati tra T_0 e T .

Per dimostrare il modello si procede in primo luogo – come nel *paper* originale – ad esplicitare il prezzo dell'opzione *target* in funzione del suo valore atteso ad una generica data futura, u . Nel caso di una *call* asiatica geometrica, si ha:

$$GAC(S, t; K, T; \Theta) = e^{-r(u-t)} \int_0^\infty g(S, t; K, u; \Theta) * GAC(K, u; K, T; \Theta) dK$$

La funzione $g(\cdot)$ esprime la densità di probabilità neutrale al rischio (Breedan e Litzenberger, 1978), pari a:

$$g(S, t; K, u; \Theta) = e^{r(T-t)} \frac{\partial^2}{\partial K^2} c(S, t; K, u; \Theta)$$

L'equazione iniziale si può dunque riscrivere come segue:

$$GAC(S, t; K, T; \Theta) = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial K^2} c(S, t; K, u; \Theta) * GAC(K, u; K, T; \Theta) dK$$

da cui ponendo,

$$w(K) = \frac{\partial^2}{\partial K^2} \text{GAC}(K, u; K, T; \Theta)$$

si ha,

$$\text{GAC}(S, t; K, T; \Theta) = \int_0^{\infty} w(K) * c(S, t; K, u; \Theta) dK$$

Si applica a questo punto la regola di quadratura di Gauss-Hermite, per approssimare l'integrale ad una sommatoria finita: in tal modo si ottiene una strategia attuabile per la copertura dell'opzione *target*, dove ad ognuna delle N opzioni di replica viene associato dal modello un peso statico, W_i . La funzione gamma $w(K)$ si può ulteriormente esplicitare come segue:

$$w(K) = \frac{\partial^2}{\partial K^2} \text{GAC}(K, u; K, T; \Theta) = e^{-r(T-u)+M+V/2} \frac{n(d_1)}{K\sqrt{V}} = e^{-r(T-u)+M+V/2} \frac{e^{-d_1^2/2}}{K\sqrt{2\pi V}}$$

Se si impone $d_1 = x\sqrt{2}$, la funzione integranda assume la forma richiesta dalla regola di quadratura e si ottengono i prezzi d'esercizio e i pesi relativi per ciascuna opzione del portafoglio di replica. Esprimendo K in funzione di d_1 si ottengono infatti gli *strike prices*,

$$K_i = K e^{x_i \sqrt{2V} - M - V}$$

e le quantità,

$$W_i = \frac{w(K_i) K_i'(x_i)}{e^{-x_i^2}} \quad w_i = \frac{e^{-r(T-u)+M+V/2}}{\sqrt{\pi}} w_i$$

L'aspetto più interessante dell'estensione proposta consiste nella possibilità di replicare staticamente un'opzione asiatica attraverso un portafoglio costituito da opzioni europee *plain vanilla*. Come in precedenza, sono state condotte una serie di analisi ed esperimenti allo scopo di testare l'effettivo funzionamento della strategia. La Tabella 1.2 mostra un esempio costruito sulla base di questi test ($N=3$), mentre la Tabella 1.3 riassume le principali statistiche descrittive (media, deviazione standard, minimo, massimo...) per l'*hedging error* derivante dalla copertura. Le statistiche sono state calcolate sulla base di un campione di $n=1000$ simulazioni casuali; per confronto, vengono riportati anche i valori ottenuti tramite *delta hedging*.

<i>Giorno</i>	S_t	GAC_{Target}	c_1	c_2	c_3	<i>Portafoglio di Replica</i>	B_t	<i>Portafoglio Ottimizzato</i>
0	100	7,88	26,50	5,01	0,00	7,55	0,33	7,88
1	101,31	8,65	27,80	6,03	0,00	8,42	0,33	8,76
2	101,36	8,66	27,84	6,02	0,00	8,43	0,33	8,76
3	100,88	8,33	27,34	5,56	0,00	8,05	0,33	8,38
4	102,67	9,44	29,12	7,09	0,00	9,33	0,33	9,67
5	103,19	9,75	29,63	7,53	0,00	9,70	0,33	10,03
6	104,35	10,51	30,78	8,60	0,00	10,58	0,33	10,91
7	105,19	11,06	31,60	9,38	0,00	11,22	0,33	11,55
8	103,90	10,14	30,30	8,10	0,00	10,18	0,33	10,51
9	104,05	10,22	30,44	8,22	0,00	10,28	0,33	10,61
10	104,40	10,43	30,79	8,54	0,00	10,54	0,33	10,87
11	102,42	9,08	28,79	6,59	0,00	8,95	0,33	9,28
12	99,88	7,48	26,24	4,22	0,00	7,00	0,33	7,33
13	101,17	8,24	27,52	5,34	0,00	7,93	0,33	8,26
14	102,74	9,20	29,08	6,80	0,00	9,13	0,33	9,47
15	104,51	10,37	30,84	8,54	0,00	10,55	0,34	10,88
16	105,02	10,69	31,33	9,02	0,00	10,94	0,34	11,27
17	105,14	10,75	31,45	9,13	0,00	11,03	0,34	11,37
18	103,84	9,82	30,13	7,81	0,00	9,96	0,34	10,29
19	101,98	8,57	28,26	5,93	0,00	8,44	0,34	8,77
20	104,08	9,93	30,35	8,02	0,00	10,13	0,34	10,47
21	104,18	9,97	30,43	8,10	0,00	10,20	0,34	10,53

Tabella 1.2 Esempificazione di replica statica per una *call* asiatica geometrica ($N=3$).

	N					<i>Delta Hedging</i>
	3	5	9	15	21	
Media	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	-0,07
Dev. Standard	0,67	0,41	0,23	0,13	0,09	0,12
Minimo	-1,24	-0,86	-0,52	-0,31	-0,22	-0,73
Massimo	1,00	0,51	0,26	0,15	0,11	0,25
Simmetria	-0,15	-0,48	-0,63	-0,63	-0,63	-0,53
Curtosi	1,78	1,97	2,16	2,18	2,19	3,35
Valore Call	7,55	7,81	7,88	7,89	7,88	7,88

Tabella 1.3 Statistiche descrittive per il modello di Carr e Wu applicato ad una *call* asiatica geometrica.

In Tabella 1.2 viene riportato un esempio di replica statica di una *call* asiatica geometrica attraverso un portafoglio di $N=3$ opzioni *call* europee *plain vanilla*, su un periodo di 21 giorni lavorativi (≈ 1 mese). L'opzione target scade tra 1 anno e il prezzo d'esercizio è fissato a 100; il periodo di osservazione inizia quando il contratto ha una vita residua di 6 mesi, pertanto $T_0=0,5$. La volatilità del sottostante è 20%, mentre il tasso di dividendo è pari a 2%; il tasso d'interesse privo di rischio è 6%. La formula di Kemna e Vorst, per $S_0=100$, restituisce per la *Geometric Asian Call* un valore corrente di 7,88. Il modello, date le assunzioni e i parametri descritti, elabora i prezzi d'esercizio (73,74; 96,08; 125,18) e i rispettivi pesi (16,23%; 64,91%; 16,23%) delle tre opzioni di copertura. La settima colonna della Tabella 1.2 riporta il valore corrente (per $t=0\dots 21$ giorni) del portafoglio di replica, come somma ponderata per i pesi statici dei prezzi delle singole opzioni. All'inizio dell'*hedging period*, il saldo (positivo o negativo) della differenza tra il premio della *GAC target* (7,88) e del portafoglio (7,55) viene investito in un titolo privo di rischio e mantenuto fino al termine della copertura. L'ultima colonna è calcolata come somma tra il valore corrente delle opzioni di replica e del saldo giornaliero del deposito *risk-free*, e rappresenta il portafoglio di copertura complessivo («ottimizzato»). L'esempio mostra come la strategia consenta di ottenere un ridotto *hedging error* utilizzando tre soli strumenti⁴ di replica, nonostante un livello di volatilità piuttosto elevato.

La Tabella 1.3 evidenzia l'effetto positivo generato da un incremento di N , misurato da alcune importanti statistiche descrittive. Si noti inoltre come l'errore di copertura medio si mantenga sempre prossimo allo zero. In conclusione, in assenza di costi di transazione i risultati ottenuti dalla nuova strategia di replica statica risultano comparabili, o addirittura migliori, a quelli prodotti dal più classico approccio di *delta hedging* dinamico (ultima colonna).

Il successo del modello è senza dubbio evidente sul piano teorico. La successiva sezione, che chiude il primo capitolo, presenta alcune interessanti evidenze empiriche, per fornire una visione completa sul tema e concluderne la trattazione.

Risultati empirici: copertura di *SPX Options*

Le *SPX Options* sono opzioni *plain vanilla* europee scritte sull'indice S&P500 e negoziate sul CBOE (*Chicago Board Options Exchange*). Per testare empiricamente i modelli di Wu e Zhu (2011) e di Carr e Wu (2002) è stato costruito un *dataset* contenente le quotazioni di fine giornata di questi strumenti; il periodo di rilevazione va dal 31 ottobre al 30 novembre 2016 (21 giorni lavorativi).

Il valore dell'indice S&P 500 al 31 ottobre 2016 era di 2126,15. Per costruire gli esempi di replica statica è stata scelta come opzione target una *call* europea *in-the-money*, con prezzo d'esercizio 2150 e scadenza 28 aprile 2017 ($\approx 0,5$ anni). Il *dividend yield* atteso

⁴ Senza considerare il titolo privo di rischio.

era pari a 2,13% (fonte: *Bloomberg*) ed il tasso d'interesse privo di rischio sui titoli governativi americani a 6 mesi era 0,51% (fonte: *US Department of the Treasury*).

<i>Data</i>	<i>S&P500</i>	c_{Target}	c_1	c_2	c_3	<i>Portafoglio di Replica</i>	B_t	<i>Portafoglio Ottimizzato</i>
31/10/2016	2126,15	74,00	222,40	54,60	0,75	73,34	0,66	74,00
01/11/2016	2111,72	65,05	206,40	46,15	0,65	65,05	0,66	65,71
02/11/2016	2097,94	59,30	196,25	40,80	0,50	59,79	0,66	60,45
03/11/2016	2088,66	57,30	192,00	39,10	0,53	57,95	0,66	58,62
04/11/2016	2085,18	55,70	189,55	37,95	0,63	56,80	0,66	57,46
07/11/2016	2131,52	71,95	224,10	53,10	0,78	72,63	0,66	73,29
08/11/2016	2139,56	62,55	205,45	44,30	0,93	63,71	0,66	64,37
09/11/2016	2163,26	92,05	257,45	72,65	1,13	91,21	0,66	91,88
10/11/2016	2167,48	87,15	246,40	67,55	1,38	86,03	0,66	86,69
11/11/2016	2164,45	88,95	249,50	69,15	1,23	87,59	0,66	88,25
14/11/2016	2164,20	89,75	253,90	71,70	1,40	90,04	0,66	90,70
15/11/2016	2180,39	92,50	263,80	77,20	1,58	95,37	0,66	96,03
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30/11/2016	2199,20	108,00	279,80	86,05	1,90	103,96	0,66	104,62

Tabella 1.4 Esempio di replica statica per *SPX Options* ($N=3$).

<i>Data</i>	<i>S&P 500</i>	c_{Target}	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	<i>Portafoglio di Replica</i>	B_t	<i>Portafoglio Ottimizzato</i>
31/10/2016	2126,15	74,00	334,55	180,30	54,60	2,45	0,18	73,22	0,78	74,00
01/11/2016	2111,72	65,05	316,45	165,40	46,15	1,90	0,15	65,11	0,78	65,89
02/11/2016	2097,94	59,30	305,00	155,75	40,80	1,55	0,15	59,92	0,78	60,70
03/11/2016	2088,66	57,30	299,90	152,05	39,10	1,53	0,13	58,14	0,78	58,92
04/11/2016	2085,18	55,70	296,95	150,00	37,95	1,68	0,20	57,07	0,78	57,85
07/11/2016	2131,52	71,95	337,40	180,80	53,10	2,15	0,18	72,50	0,78	73,28
08/11/2016	2139,56	62,55	316,55	164,15	44,30	2,33	0,28	63,94	0,78	64,72
09/11/2016	2163,26	92,05	374,50	212,10	72,65	3,85	0,33	90,61	0,78	91,39
10/11/2016	2167,48	87,15	361,80	202,45	67,55	4,15	0,38	85,69	0,78	86,47
11/11/2016	2164,45	88,95	365,50	205,15	69,15	3,95	0,35	87,13	0,78	87,91
14/11/2016	2164,20	89,75	370,20	209,30	71,70	4,50	0,45	89,58	0,78	90,36
15/11/2016	2180,39	92,50	380,65	218,35	77,20	5,20	0,48	94,78	0,78	95,56
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30/11/2016	2199,20	108,00	398,10	233,40	86,05	6,25	0,50	103,24	0,78	104,03

Tabella 1.5 Esempio di replica statica per *SPX Options* ($N=5$).

Dato il valore osservato nel *dataset* per l'opzione target, pari a \$ 74 (prezzo medio tra *bid* e *ask*), la volatilità implicita risultava essere circa 15,66%⁵.

Le Tabelle 1.4 e 1.5 presentano due diverse simulazioni di replica statica secondo il modello di Carr e Wu (2002), rispettivamente con tre e cinque opzioni di copertura. La Tabella 1.6 invece, esemplifica l'applicazione del modello di Wu e Zhu (2011).

<i>Data</i>	<i>S&P 500</i>	c_{Target}	c_d	c_c	c_u	<i>Portafoglio di Replica</i>	<i>Ratio</i>	<i>Portafoglio Ottimizzato</i>
31/10/2016	2126,15	74,00	201,15	33,15	1,53	70,98	0,96	74,00
01/11/2016	2111,72	65,05	185,55	26,60	1,20	63,64	0,96	66,35
02/11/2016	2097,94	59,30	175,60	22,50	0,98	59,00	0,96	61,51
03/11/2016	2088,66	57,30	171,80	21,30	1,05	57,43	0,96	59,87
04/11/2016	2085,18	55,70	169,45	20,65	1,15	56,51	0,96	58,92
07/11/2016	2131,52	71,95	202,25	31,90	1,35	70,68	0,96	73,69
08/11/2016	2139,56	62,55	184,55	25,10	1,65	62,82	0,96	65,50
09/11/2016	2163,26	92,05	234,45	48,10	2,35	87,10	0,96	90,81
10/11/2016	2167,48	87,15	224,30	43,80	2,65	82,45	0,96	85,96
11/11/2016	2164,45	88,95	227,10	44,95	2,45	83,69	0,96	87,25
14/11/2016	2164,20	89,75	231,45	46,90	2,85	85,87	0,96	89,53
15/11/2016	2180,39	92,50	240,90	51,65	3,25	90,72	0,96	94,58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30/11/2016	2199,20	108,00	256,40	57,90	3,95	97,99	0,96	102,17

Tabella 1.6 Esempio di triangolo simmetrico per *SPX Options*.

I tre esempi pratici riportati confermano gli ottimi risultati ottenuti dagli autori. Emergono anche alcuni aspetti interessanti. In primo luogo, in seguito ai test condotti si osserva che le strategie di replica statica si rivelano maggiormente efficaci se l'opzione target è *at-the-money*, o se comunque il valore corrente del sottostante si trova in prossimità del prezzo d'esercizio. Questo aspetto è ancora più rilevante in un'ottica di confronto con l'approccio di replica dinamica, in cui la copertura è migliore quando l'opzione target è *deep-in* o *deep-out-of-the-money*⁶: le due tecniche risultano, in un certo senso, complementari tra loro. Infine, nel modello di Carr e Wu la teoria suggerisce che la replica ottenuta sia tanto più accurata quanto maggiore è il numero di opzioni che vengono aggiunte al portafoglio di copertura. Gli esempi mostrati in Tabella 1.4 e 1.5 suggerirebbero però una differente conclusione. Questo risultato «anomalo» si

⁵ La volatilità implicita è stata calcolata mediante *reverse engineering* della formula di valutazione di Black, Scholes e Merton.

⁶ Il gamma è più basso e di conseguenza il delta è più stabile.

deve al fatto che la volatilità implicita dell'indice S&P 500 non è costante, bensì varia in funzione del prezzo d'esercizio (c.d. *moneyness* dello strumento) e della scadenza, sebbene la versione classica del modello di Black, Scholes e Merton non sia in grado di tenere conto di questa circostanza⁷. Quando N aumenta, al portafoglio vengono aggiunte opzioni *deep-out* o *deep-in-the-money*, per le quali il modello – che ipotizza un livello *flat* di volatilità a 15,66% – predice un prezzo lontano da quello osservato nel *dataset*. Di conseguenza, l'efficacia complessiva della replica peggiora.

⁷ Il modello di Black, Scholes e Merton assume che la volatilità sia costante, ovvero non dipenda né da K né da T . In realtà, è empiricamente dimostrata l'esistenza di una superficie di volatilità, funzione di queste due variabili.

Capitolo 2

Replica Statica delle Opzioni con Barriera

Come anticipato nell'introduzione al *paper*, le opzioni con barriera sono strumenti derivati molto complessi, ed è proprio la loro particolare struttura a renderli compatibili con l'utilizzo delle strategie di replica statica. La letteratura in materia è decisamente ricca di contributi e in questa sede vengono riproposti alcuni di essi con l'intento di sviluppare nuove estensioni e perfezionamenti delle strategie originali. Infine, al termine del capitolo si presentano e discutono gli aspetti principali emersi dalle analisi empiriche effettuate.

L'approccio *Maturity-Spread*

Il *Maturity-spread approach* è stato sviluppato nel 1995 da Derman, Ergener e Kani. La strategia proposta dagli autori prevede la costruzione di un portafoglio di opzioni europee *plain vanilla* con diverse scadenze e stesso prezzo d'esercizio, da cui deriva il nome della tecnica. Le opzioni con barriera target possono essere di tipo «*knock-in*» o «*knock-out*», ovvero attivarsi o cessare di esistere se e quando il prezzo del sottostante raggiunge la barriera. Queste opzioni vengono ulteriormente classificate in «*up*» o «*down*», a seconda che la barriera (H) si trovi al di sopra o al di sotto di S_0 .

L'approccio si basa sul principio secondo cui se due portafogli assumono lo stesso valore lungo un certo contorno, allora l'uguaglianza rimane valida anche all'interno del contorno stesso. In pratica, per garantire la replica è sufficiente assicurarsi che l'opzione target e il portafoglio abbiano uguale valore in alcuni «punti» o momenti specifici, ad esempio quando il sottostante tocca la barriera prima della scadenza (ossia $S_t=H$ e $t<T$).

Opzioni con barriera «discrete»

Nello sviluppo della strategia, Derman, Ergener e Kani individuano il contorno lungo il quale l'opzione con barriera target e il portafoglio di copertura devono assumere lo stesso valore affinché la replica statica risulti efficace. Nel caso di una *up-and-out call* ad esempio, il contorno è dato da:

- Un contorno «verticale», definito da tutti i punti in cui $S<H$ e $t=T$;
- Un contorno «orizzontale», definito da tutti i punti in cui $S=H$ e $t<T$.

In questo caso, per garantire l'uguaglianza lungo il primo contorno è sufficiente acquistare una *call* ordinaria con le stesse caratteristiche dell'opzione target: se infatti alla scadenza ($t=T$) il sottostante è al di sotto della barriera, i due *payoffs* si equivalgono. Decisamente più complicata è invece la copertura del contorno orizzontale, per la quale sarebbe teoricamente necessario negoziare un *continuum* di opzioni per poter replicare tutti gli infiniti punti che lo compongono. Gli autori suggeriscono una possibile soluzione, che consiste nel «discretizzare» l'intervallo e coprire soltanto alcuni di questi punti, ottenendo una replica parziale del target.

Il lavoro di Derman, Ergener e Kani si focalizza sulle opzioni con barriera «standard», per le quali la frequenza di osservazione del prezzo del sottostante è istantanea. Di conseguenza, il contorno orizzontale corrisponde ad un segmento continuo, e la discretizzazione produce un *hedging error* tanto maggiore quanto minore è il numero di opzioni contenute nel portafoglio di copertura – ovvero il numero di punti replicati lungo l’intervallo $(0, T)$. In questa sezione si vuole invece esaminare l’utilizzo del *Maturity-spread approach* per la replica statica esatta di opzioni con barriera «discrete», garantendo il *match* tra il target e il portafoglio in ciascuna *monitoring date*. L’applicazione della tecnica alle *discrete barrier options* consente di ottenere non soltanto un buon metodo di copertura ma anche un criterio di valutazione per individuare il *fair price* (in assenza di opportunità di arbitraggio) di questi strumenti.

Broadie, Glasserman e Kou (1997) hanno proposto una semplice correzione alla formula di Merton per ottenere il prezzo di un’opzione con barriera con frequenza di osservazione discreta, m . Nel caso di una *up-in* o *up-out option*, è sufficiente sostituire la barriera H nella formula di valutazione classica con $He^{0,5826\sigma T/m}$, dove il fattore 0,5826 è un’approssimazione della funzione:

$$-\zeta\left(\frac{1}{2}\right)/\sqrt{2\pi} \approx 0,5826$$

con ζ che rappresenta la funzione Zeta di Riemann. L’approssimazione commette un errore che è o-piccolo di $1/\sqrt{m}$, che si riduce pertanto all’aumentare della frequenza di monitoraggio.

Si consideri ad esempio una *up-and-out call* con scadenza tra 20 settimane ($T=0,384$), scritta su un sottostante che non paga dividendi ed il cui prezzo corrente (S_0) sia uguale a 95. Il prezzo d’esercizio è pari a 100, la barriera a 120 ed il tasso d’interesse privo di rischio e la volatilità sono costanti e rispettivamente uguali a 5% e 30%. In base alla formula di valutazione di Merton, il prezzo dell’opzione risulta essere 1,289. La Figura 2.1 mostra come il portafoglio si avvicini progressivamente al valore target all’aumentare di N , il numero di opzioni di replica utilizzate. Dalla Figura 2.2 invece si osserva come sia possibile ottenere un valore target decisamente più in linea con quello del portafoglio di copertura applicando la correzione di Broadie, Glasserman e Kou, anche per valori di N contenuti. Nel tracciare il grafico, si è ipotizzato di fissare N punti equidistanti lungo il contorno, con $N=1/m$: se ad esempio la frequenza di monitoraggio fosse settimanale sarebbe necessario negoziare 20 diverse opzioni (una per ogni settimana tra la data corrente e la scadenza).

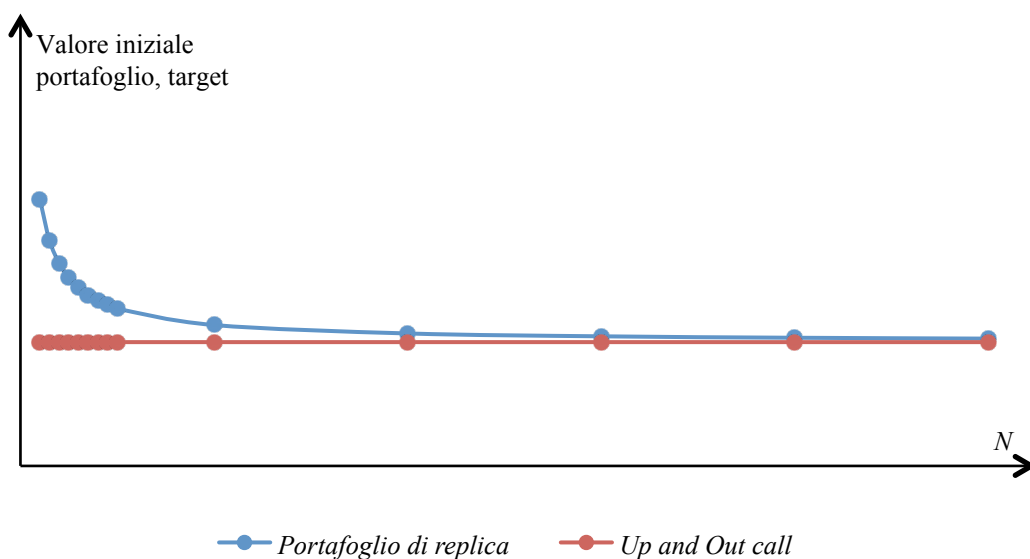


Figura 2.1 Valore iniziale del portafoglio di replica e dell'*up-and-out call* al variare di N .

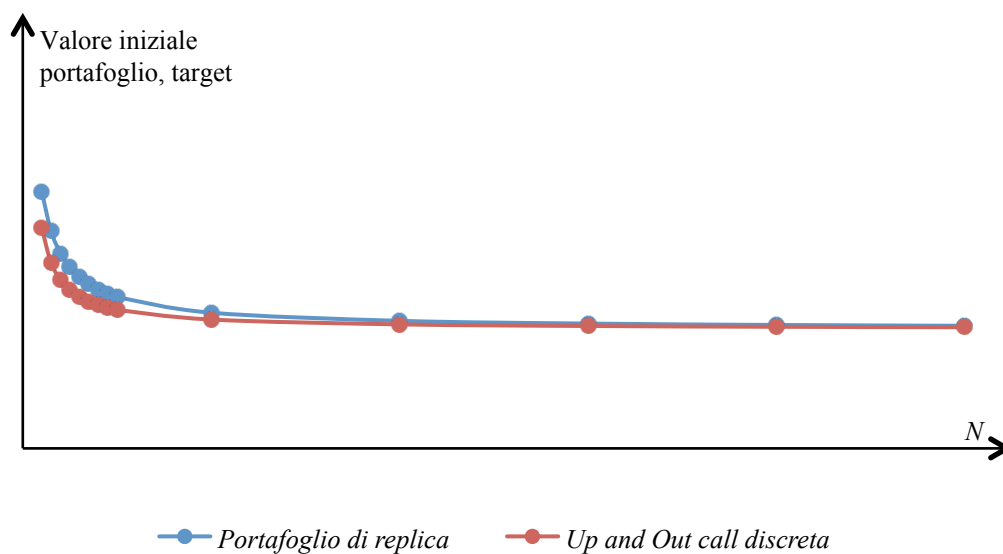


Figura 2.2 Valore iniziale del portafoglio di replica e dell'*up-and-out call* discreta al variare di N .

La differenza osservabile in Figura 2.2 tra il portafoglio e l'opzione target è dovuta all'errore di approssimazione commesso dalla correzione di Broadie, Glasserman e Kou, che – come previsto – decresce rapidamente all'aumentare di N . L'evidenza grafica conferma quindi l'idea che il *Maturity-spread approach* possa fornire un metodo di valutazione e di *hedging* statico per opzioni con barriera discrete.

L'approccio *Strike-Spread*

Lo *Strike-spread approach* è stato sviluppato nel 1997 da Carr e Chou, e prevede la costruzione di un portafoglio di replica statica composto da opzioni europee *plain vanilla* con la stessa scadenza e diversi prezzi d'esercizio. Il metodo è quindi concettualmente simile a quello analizzato nella sezione precedente, ma l'implementazione risulta in realtà differente. In letteratura è ritenuto essere uno degli approcci più efficaci. La sua applicazione è inoltre facilitata dalla notevole disponibilità di prezzi d'esercizio su ciascuna scadenza per le opzioni negoziate su mercati regolamentati (e.g., *SPX Options*).

La strategia di Carr e Chou è *model-dependent*, poiché si basa sulla valutazione neutrale al rischio di Black, Scholes e Merton. Il modello parte dall'*payoff* dell'opzione con barriera target e, svolgendo alcuni passaggi matematici, ottiene un *payoff* corretto (*adjusted payoff*) che risulta equivalente al *payoff* originale e che – come dimostrano gli autori – si può replicare staticamente con un portafoglio di opzioni europee *plain vanilla*.

Gli *adjusted payoffs* di una *up-and-out call* e di una *down-and-out call* sono rappresentati, a scopo dimostrativo, in Figura 2.3.

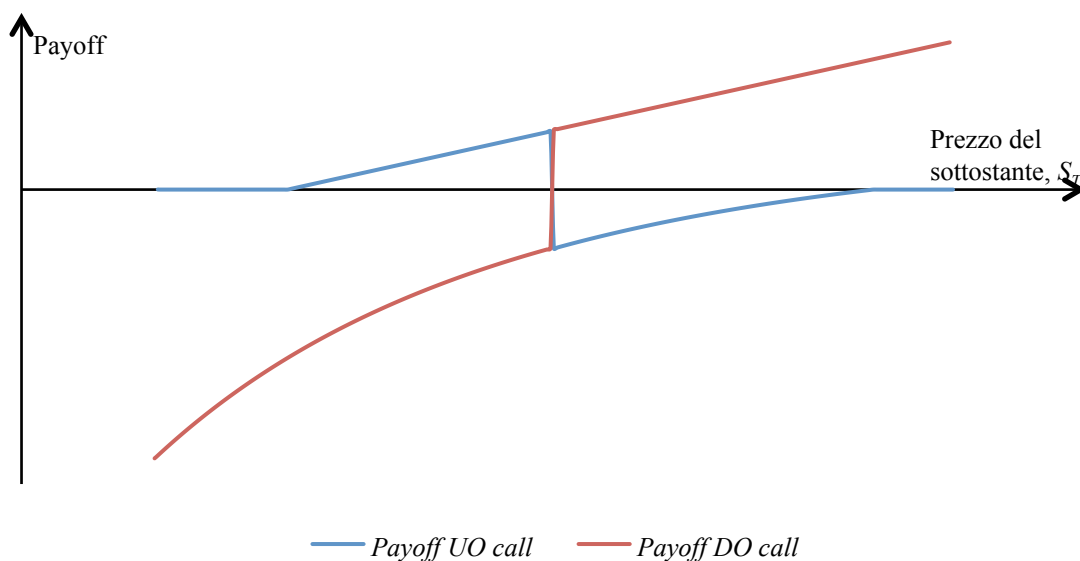


Figura 2.3 *Adjusted payoffs* per una *up-and-out call* e una *down-and-out call*.

Ad esempio, per replicare staticamente una *down-and-out call* mediante l'approccio *Strike-spread* si procede come segue:

- Si acquista la *call* ordinaria equivalente;
- Si acquista o vende una certa quantità q_1 di *puts* con prezzo d'esercizio $K_1 < H$, per replicare l'*adjusted payoff* nel punto $S_1 < K_1$.
- Si acquista o vende una certa quantità q_2 di *puts* con prezzo d'esercizio $K_2 < S_1$, per replicare l'*adjusted payoff* nel punto $S_2 < K_2$.

- Si procede in modo iterativo fino al N -esimo strumento, con cui si completa il portafoglio.

Come in precedenza, la scelta di N è libera e la copertura risulta tanto migliore quanto maggiore è il numero di opzioni utilizzate nella costruzione dell'*hedging portfolio*.

Si ipotizzi di voler replicare una *down-and-out call* ($S_0=95$; $K=100$; $H=90$; $\sigma=20\%$; $r=5\%$; $q=2\%$; $T=1$); in base ai parametri definiti, il valore corrente calcolato con la formula di valutazione di Merton è pari a 3,835. La Figura 2.4 mostra il confronto tra l'opzione target e il portafoglio di copertura. Il delta esprime la distanza tra i punti replicati (S_i e K_i) ed è costante a parità di N , ovvero il contorno viene diviso in N punti tra loro equidistanti.

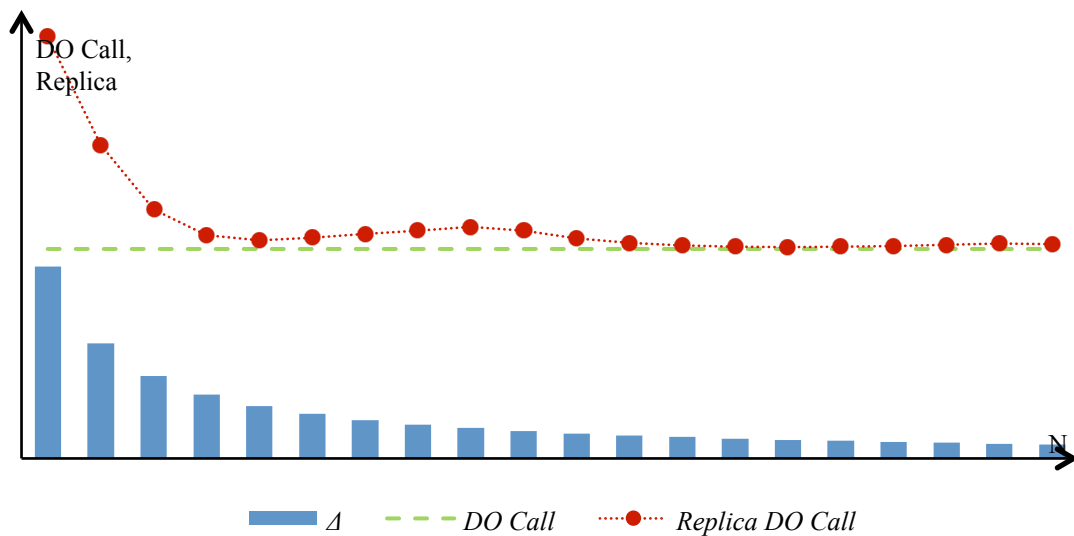


Figura 2.4 Replica di una *down-and-out call* al variare di N tramite *Strike-spread approach*.

La tendenza di fondo che emerge dal grafico suggerisce come l'aggiunta di ulteriori opzioni al portafoglio possa avere in media un impatto positivo sulla precisione della strategia, generando un beneficio marginalmente decrescente al crescere di N . Tuttavia, l'aumento del numero di strumenti di replica utilizzati non implica necessariamente una riduzione dell'*hedging error*. Una possibile motivazione risiede nel fatto che la spaziatura equidistante tra i punti del contorno da replicare potrebbe non essere adeguata, perché non tiene conto né della struttura dell'opzione target né della natura del sottostante. Nella prossima sezione viene pertanto proposta e sviluppata una misura di *spacing* alternativa, allo scopo di migliorare l'efficacia della strategia.

Estensione del modello: spaziatura ottimizzata

Per risolvere i limiti evidenziati dallo *Strike-spread approach* viene elaborato un nuovo metodo quantitativo, che consente di ottenere una migliore spaziatura tra i prezzi d'esercizio delle opzioni di replica. La tecnica tiene infatti conto della funzione di densità dei rendimenti, nell'ipotesi di distribuzione log-normale per il sottostante (S_t). Secondo il

principio di valutazione neutrale al rischio, il rendimento annuo atteso a scadenza di ogni *security* è dato da $(r-q-\sigma^2/2)T$, dove r esprime il tasso d'interesse privo di rischio, q il tasso di dividendo e T la scadenza del titolo. La volatilità è espressa da σ , e misura la dispersione dei rendimenti del titolo intorno alla media. Il rendimento di S_T segue quindi una distribuzione normale, con media $(r-q-\sigma^2/2)T$ e deviazione standard $\sigma\sqrt{T}$.

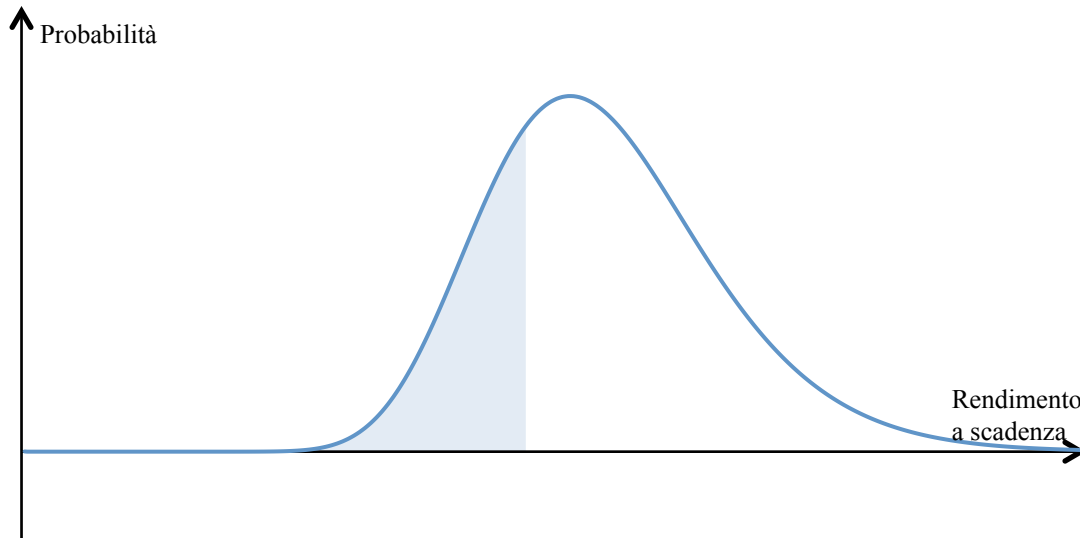


Figura 2.5 Distribuzione di probabilità del rendimento a scadenza di una *down-and-out call*.

La Figura 2.5 mostra la funzione di densità di probabilità (*PDF*) dei rendimenti a scadenza del sottostante, rappresentata dalla classica campana di Gauss. Ricollegandosi all'esempio della *down-and-out call* presentato nella sezione precedente, l'area al di sotto della *PDF* evidenziata in azzurro esprime la probabilità che $\ln(S_T/S_0)$ sia pari o inferiore a $\ln(H/S_0)$. In base ai parametri ipotizzati, la media e la deviazione standard del rendimento a scadenza risultano rispettivamente uguali a 3% e 20%. Si ottiene quindi $\Pr(S_T < H) = 33,71\%$, ovvero la probabilità che alla scadenza dell'opzione si realizzi un valore del sottostante inferiore alla barriera. Per ottenere la spaziatura ottimale, si divide innanzitutto in $2N+1$ intervalli l'area e, dopo aver individuato i rendimenti corrispondenti ai diversi livelli di probabilità, si individuano i punti S_i e K_i attraverso l'inversa della funzione di densità. Diversamente dalla strategia originale, con il nuovo metodo proposto i punti da replicare risulteranno (a parità di N) più spostati verso H , a riflettere la struttura della funzione di densità. Nel caso in cui $N=3$ ad esempio, l'area azzurra viene divisa in sette intervalli pari a circa 4,82% ciascuno. In Excel, la funzione «Inv.Norm.N» permette di ottenere i rendimenti a scadenza e i relativi valori impliciti per K_i (87,58, 82,29, 75,44) e per S_i (85,04, 79,19, 70,20), a partire dalle probabilità ottenute (28,90%, 24,08%, 19,26%, 14,45%, 9,63%, 4,82%). I nuovi punti del contorno sono diversi da quelli ottenuti con la spaziatura equidistante proposta da Carr e Chou, che considerava intervalli più ampi e valori anche molto lontani dalla barriera e dal

prezzo corrente del sottostante. Il portafoglio costruito con il nuovo metodo risulta uguale a 3,99, lo stesso valore che si otteneva con $N=4$ nella strategia originale, contro un valore della *down-and-out call* di 3,835. La Figura 2.6 riprende il confronto già mostrato in Figura 2.5 al quale sovrappone la replica ottimizzata dell'opzione target.

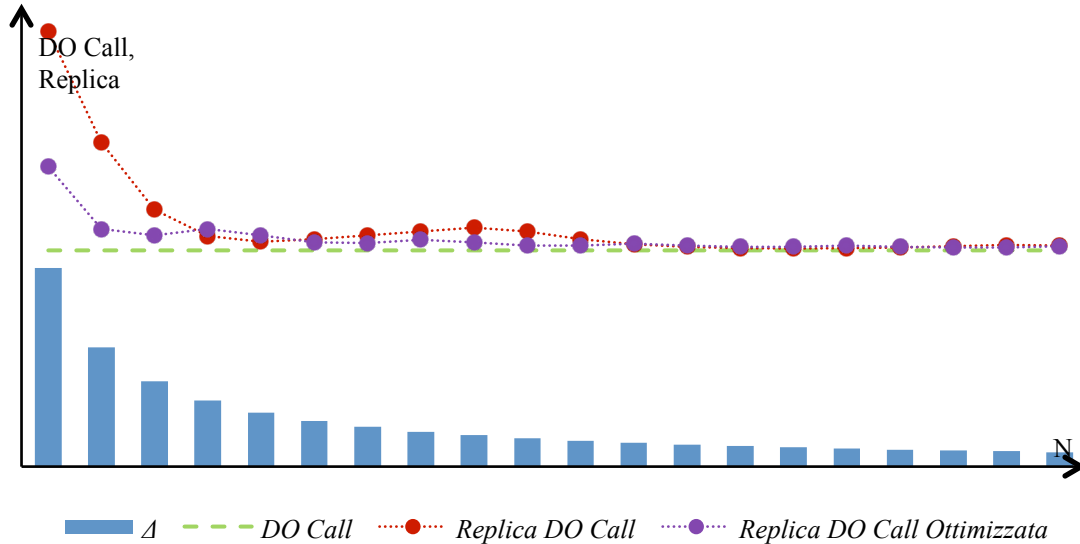


Figura 2.6 Replica di una *down-and-out call* al variare di N tramite *Strike-spread approach* ottimizzato.

Rispetto al modello di partenza, la replica ottimizzata produce una copertura migliore del target. La differenza di precisione tra i due metodi è particolarmente evidente per valori contenuti di N e, fatta eccezione per due soli casi ($N=4$; $N=5$), si mantiene stabilmente positiva anche se aumenta il numero di strumenti di replica. In generale, l'ottimizzazione produce un effetto positivo sull'efficacia della strategia, indipendentemente dai parametri definiti o dal tipo di opzione target considerata. Inoltre, per calcolare la spaziatura ottimale non è necessario specificare assunzioni aggiuntive né stimare variabili ulteriori rispetto all'approccio originale, che sfruttava già il principio di valutazione neutrale al rischio e considerava gli stessi parametri utilizzati dalla nuova tecnica. Alla luce dei risultati ottenuti, il metodo sviluppato si propone come un'interessante alternativa al modello di Carr e Chou.

Risultati empirici: Pricing di Opzioni con Barriera

In questo ultimo paragrafo vengono implementati alcuni dei modelli visti in precedenza, per prezzare opzioni con barriera partendo dalle quotazioni di opzioni *plain vanilla* europee. Il *dataset* di riferimento è lo stesso impiegato nel Capitolo 1, contenente i prezzi di chiusura giornalieri di *SPX calls* e *puts* per un periodo che va dal 31 ottobre al 30 novembre 2016.

Vengono testati e messi a confronto l'approccio *Strike-spread* ed una strategia basata sulla relazione di *Put-Call Symmetry*, proposta originariamente da Bowie e Carr

(1994) e ulteriormente sviluppata in seguito da Carr, Ellis e Gupta (1998). Tale strategia consente di definire un *range* di prezzo per l'opzione con barriera target, in assenza di opportunità di arbitraggio. In particolare, nel caso di una *down-and-out call*, se il tasso d'interesse privo di rischio è maggiore del tasso di dividendo del sottostante, la *Put-Call Symmetry* permette di ottenere il risultato seguente:

$$c(K) - \frac{K}{\hat{H}} p\left(\frac{\hat{H}^2}{K}\right) \leq \text{DOC}(K, H) \leq c(K) - \frac{K}{H} p\left(\frac{H^2}{K}\right)$$

La relazione si inverte quando $r < q$. Il prezzo della *down-and-out call* con prezzo d'esercizio K e barriera H si colloca all'interno di un intervallo definito semplicemente dal prezzo di due opzioni ordinarie: ad esempio, il limite superiore è calcolato come differenza tra il prezzo di una *call* e di una *put*, con prezzi d'esercizio rispettivamente pari a K e H^2/K . Con \hat{H} si indica la c.d. «*forward barrier*», calcolata come:

$$\hat{H} = H e^{(r-q)T}$$

L'affinità dell'equazione soprastante con la formula di valutazione di un contratto *forward* risulta evidente, ed aiuta a comprendere il concetto di *forward barrier*.

Si consideri dunque una *down-and-out call* scritta sull'indice S&P 500; si ipotizza un prezzo d'esercizio di 2150, una barriera a 2100 e la scadenza al 16 dicembre 2016. Il 31 ottobre 2016, il valore di chiusura dell'indice era 2126,15, il tasso d'interesse privo di rischio 0,25% e il tasso di dividendo 2,13%. La volatilità implicita stimata per la *call* ordinaria equivalente – con un prezzo pari a 29,65 – è pari a 14,07%. Si è scelto di considerare nell'esempio un'opzione con barriera a breve scadenza (≈ 1 mese e mezzo) per la presenza di un elevato numero di *calls* e *puts* europee *plain vanilla* disponibili con diversi prezzi d'esercizio, in modo da facilitare l'implementazione della strategia di Carr e Chou.

L'applicazione della *Put-Call Symmetry* permette innanzitutto di definire il limite massimo e minimo per il valore dell'opzione target. Poichè $r < q$, si ha che:

$$c(2150) - \frac{2150}{2100} p\left(\frac{2100^2}{2150}\right) \leq \text{DOC}(2150, 2100) \leq c(2150) - \frac{2150}{2095} p\left(\frac{2095^2}{2150}\right)$$

dove la *forward barrier* \hat{H} è uguale a 2095. Sostituendo nella relazione i prezzi delle opzioni di replica osservati nel *dataset*, si ottiene:

$$29,65 - 1,02 * 23,5 \leq \text{DOC}(2150, 2100) \leq 29,65 - 1,03 * 21,55$$

$$5,59 \leq \text{DOC}(2150,2100) \leq 7,73$$

Dunque, in assenza di opportunità di arbitraggio¹, il prezzo al 31 ottobre 2016 di una *down-and-out call* si colloca all'interno dell'intervallo che va da 5,59 a 7,73. Il prezzo stimato attraverso la formula di valutazione di Merton risulta invece pari a 15,73, ben al di fuori del *range* definito dalla *Put-Call Symmetry*. A cosa si deve la differenza? Come in precedenza, la causa del disallineamento osservato si deve alla superficie di volatilità che emerge dalle quotazioni delle *SPX Options*. Nell'esempio in analisi infatti, le due *puts* utilizzate per calcolare il limite inferiore e il limite superiore del prezzo dell'opzione target assumono valori di volatilità implicita più elevati rispetto alla *call*, rispettivamente pari a 17,63% e 17,28% per $K=2040$ e $K=2050$. Si ritiene utile chiarire ulteriormente che, al netto di eventuali errori commessi nella stima dei parametri iniziali, il prezzo teorico ottenuto con la formula di Merton non rispetta la condizione di non arbitraggio, e sarebbe quindi sbagliato utilizzarlo come termine di riferimento all'interno dell'analisi. Infatti, se la *down-and-out call* fosse quotata a 15,73, un *trader* potrebbe venderla ed acquistare contestualmente il limite superiore dell'intervallo, che ha per costruzione un *payoff* almeno uguale a quello dell'opzione con barriera, realizzando un profitto privo di rischio pari a 7,94 (=15,73-7,79).

<i>Prezzo d'esercizio [K]</i>	<i>Prezzo corrente [p(K)]</i>	<i>Quantità</i>
2090	32,95	0,00
2070	27,80	0,00
2050	23,50	-1,08
2030	19,80	0,28
2010	16,70	-0,21
1990	14,05	0,28
1970	11,90	-0,21
1950	10,05	0,28
1930	8,35	-0,21
1910	7,15	0,28
1890	6,20	-0,21
1870	5,30	0,28
1850	4,55	-0,21
1830	3,95	0,28
1810	3,45	-0,22
1790	3,03	0,28
1770	2,63	-0,22
1750	2,33	0,27
1730	2,08	-0,22
1710	1,85	0,27

Tabella 2.1 *Strike-spread approach* applicato a *SPX Options*.

¹ Senza considerare l'eventuale presenza di costi di transazione.

Passando all'implementazione della seconda strategia, si è deciso di procedere inserendo all'interno del portafoglio di copertura, oltre alla *call* ordinaria corrispondente alla *down-and-out call* target, una serie di *puts* con prezzi d'esercizio vicini alla barriera, iniziando con $N=1$ e allontanandosi progressivamente da H all'aumentare del numero di strumenti considerati nella copertura. I pesi così ottenuti per le singole opzioni di replica sono indipendenti da N , e risulta più facile costruire il portafoglio aggiungendo di volta in volta nuove opzioni. La spaziatura tra i prezzi d'esercizio (K_i) e i *matching points* sul contorno (S_i) è uguale a 10. Ad esempio, per $N=3$ si ha $K_i=2090, 2070, 2050$ e $S_i=2080, 2060, 2040$. La Tabella 2.1 riassume i valori utilizzati, i prezzi delle *puts* e i relativi pesi ottenuti dall'applicazione della strategia per $N=1, \dots, 20$. La Figura 2.7 mostra invece l'output dei due modelli a confronto: l'intervallo restituito dall'applicazione della *Put-Call Symmetry* (in rosso chiaro), la replica mediante *Strike-spread approach* (in blu) e il prezzo teorico calcolato con la formula di Merton (in verde).

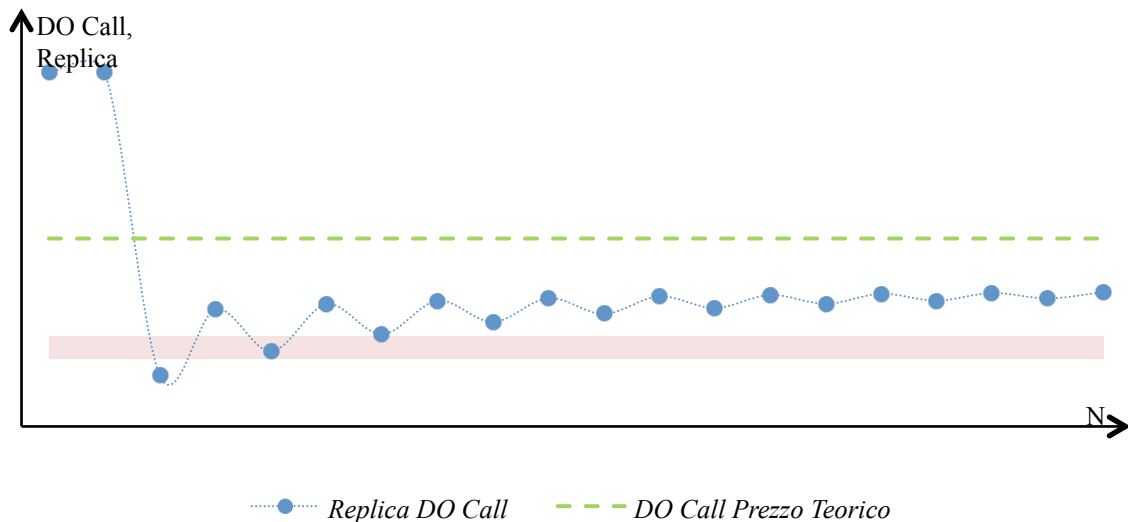


Figura 2.7 Replica di una *down-and-out call* tramite *Strike-spread approach* al variare di N (dati reali).

La replica statica costruita sfruttando la strategia di Carr e Chou riproduce con buona approssimazione il valore dell'opzione target a partire da $N=3$ opzioni di copertura, rimanendo quasi sempre al di sopra del valore di mercato della *down-and-out call* target. Il valore del portafoglio si colloca circa a metà strada tra il prezzo teorico dello strumento e l'intervallo stimato in assenza di opportunità di arbitraggio. Lo *Strike-spread approach* infatti, risente dell'influenza di due diversi fattori: da un lato, la strategia si basa sul principio di valutazione neutrale al rischio comune anche alla formula di valutazione di Merton, mentre dall'altro l'impiego di dati reali avvicina la replica all'intervallo ottenuto con la *Put-Call-Symmetry*. Dalle ulteriori analisi condotte sul *dataset* per diversi tipi di opzione target è stato possibile riscontrare in generale lo stesso tipo di comportamento.

In conclusione, le strategie di replica statica mostrano ottimi risultati sia in ambito teorico che pratico. La loro applicazione permette ai *traders* di determinare il prezzo delle opzioni con barriera sulla base delle quotazioni di opzioni *plain vanilla* europee e fornisce loro un'alternativa più efficace e meno costosa alle classiche tecniche di copertura dinamica.

Conclusioni

Lo studio e le analisi condotte hanno permesso di estendere, ottimizzare e testare empiricamente alcune interessanti strategie di replica statica per opzioni ordinarie e con barriera. Rispetto alle più note e diffuse tecniche di copertura dinamica, i modelli di replica statica consentono di ridurre sensibilmente l'impatto dei costi di transazione, contenere l'*hedging error* e realizzare un *matching* migliore dei diversi fattori di rischio che influenzano lo strumento target. Il presente lavoro di ricerca ha permesso di confermare le positive premesse iniziali relativamente ai modelli trattati, di sviluppare idee originali e applicazioni alternative e di contribuire al progresso della letteratura esistente su questi temi.

Nel primo capitolo sono state prese in esame le tecniche di replica statica delle opzioni ordinarie: i modelli di Wu e Zhu (2011) e di Carr e Wu (2002) sono stati rielaborati con l'intento di estenderne l'applicazione ad alcuni tipi di opzioni esotiche (opzioni di scambio e opzioni asiatiche geometriche). I risultati delle simulazioni effettuate hanno dimostrato, sul piano teorico, l'efficacia delle nuove tecniche sviluppate. Infine, l'analisi storica dei due modelli originali ha confermato il buon funzionamento delle strategie di replica statica anche in un contesto reale, in linea con i riscontri ottenuti dai loro autori.

Nel secondo capitolo sono stati proposti utilizzi alternativi e ottimizzazioni per alcuni dei principali metodi di replica statica delle opzioni con barriera. Anche in questo caso, tanto le simulazioni teoriche quanto i test empirici hanno avvalorato le ipotesi di partenza.

I modelli studiati si sono rivelati particolarmente utili per il *pricing* e l'*hedging* delle opzioni con barriera. Le analisi proposte e le novità introdotte hanno mostrato risultati interessanti, lasciando spazio in futuro ad ulteriori approfondimenti e avanzamenti della materia.

Riferimenti bibliografici

- BOWIE, J. e CARR, P., “Static Simplicity”, *Risk* 7, (1994), 45-49.
- BROADIE, M., GLASSERMAN, P. e KOU, S. G., “A Continuity Correction for Discrete Barrier Options”, *Mathematical Finance*, 7, 4, (Ottobre 1997), 325-349.
- BREEDEN, D. T., e LITZENBERGER, R. H., “Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices”, *The Journal of Business*, 51, 4 (1978), 621-651.
- CARR, P. e CHOU, A., “Breaking Barriers: Static Hedging of Barrier Securities”, *Risk*, 10, 9 (Settembre 1997), 139-145.
- CARR, P. e CHOU, A., “Hedging Complex Barrier Options”, *Working Paper, Morgan Stanley and MIT Computer Science*, (1997).
- CARR, P., ELLIS, K. e GUPTA, V., “Static Hedging of Exotic Options”, *The Journal of Finance*, 53, 3 (Giugno 1998), 1165-1190.
- CARR, P. e MADAN, D., “Towards a Theory of Volatility Trading”, *Risk Book on Volatility*, (1998), 417-427.
- CARR, P. e WU, L., “Static Hedging of Standard Options”, *NY University and Baruch College Working Paper*, (2002).
- DERMAN, E., ERGENER, D. e KANI, I., “Static Options Replication”, *Journal of Derivatives*, 2, 4, (Summer 1995), 78-95.
- EASTON, S., GERLACH, R., GRAHAM, M. e TUYL, F., “An Empirical Examination of the Pricing of Exchange-Traded Barrier Options”, *Journal of Futures Markets*, 24, 11(Novembre 2004), 1049-1064.
- ENGELMANN, B., FENGLER, M., R., NALHOLM, M. e SCHWENDNER, P., “Static versus dynamic hedges: an empirical comparison for barrier options”, *Review of Derivatives Research*, 9 (2007), 239-264.
- HULL, J. C., “Opzioni, Futures e Altri Derivati” – 9^a Edizione, ed. italiana a cura di Emilio Barone”, *Pearson*, (2015).
- KEMNA, A.G.Z., e VORST, A.C.F., “A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values”, *Journal of Banking and Finance*, 14 (1990), 113-129.
- LELAND, H. E., “Option Pricing and Replication with Transaction Costs”, *The Journal of Finance*, 40, 5 (December 1985), 1283-1301.
- MARGRABE, W., “The Value of an Option to Exchange an Asset for another”, *Journal of Finance*, 33, 1 (1978), 177-186.
- MCDONALD, R., L., “Derivatives Markets – 3rd edition”, *Pearson Series in Finance*, (2013).
- MERTON, R. C., “Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous”, *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), 125-144.
- MERTON, R. C., “Theory of Rational Option Pricing”, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973), 141-183.
- NALHOLM, M. e POULSEN, R., “Static Hedging of Barrier Options Under General Asset Dynamics: Unification and Application”, *Journal of Derivatives*, 13 (2006), 46–60.
- RUBINSTEIN, M., e REINER, E., “Breaking Down The Barriers”, *Risk*, (September 1991), 28-35.

TOMPKINS, R., G., “Static versus dynamic hedging of exotic options: An evaluation of hedge performance via simulation”, *Journal of Risk Finance*, 3 (2002), 6–34.

WANG, S., SHEN, Y., e QIAN, L., “Static Hedging of Geometric Average Asian Options with Standard Options”, *Communication in Statistics – Simulation and Computation*, (2015), 2101-2116.

WU, L. e ZHU, J., "Simple Robust Hedging with Nearby Contracts.", *SSRN Working Paper Series* (2011).