Libera Università Internazionale
degli Studi Sociali Guido Carli

PREMIO TESI D'ECCELLENZA

Analisi macroeconomica dell'impatto del covid-19 mediante un modello DSGE

Gianluca Gengo

2020-2021

LUISS

Libera Università Internazionale
degli Studi Sociali Guido Carli

Working Papaer n. 3/2020-2021
Publication date: January 2023
Analisi macroeconomica dell'impatto del covid-19 mediante un modello DSGE

ISBN 978-88-6105-931-3

Luiss Academy is an imprint of
Luiss University Press – Pola Srl
Viale Pola 12, 00198 Roma
Tel. 06 85225485
E-mail lup@luiss.it
www.luissuniversitypress.it

Analisi macroeconomica dell'impatto del covid-19 mediante un modello DSGE

di Gianluca Gengo*

ABSTRACT

Il seguente lavoro rappresenta un estratto della mia tesi di laurea magistrale in Economia e Finanza presso l'università Luiss Guido Carli. L'obiettivo che mi ero prefissato nello scrivere tale tesi era quello di dare al lettore uno visione il più esaustiva e precisa possibile delle peculiarità macroeconomiche dello shock pandemico e come queste abbiano perturbato l'equilibrio domanda/offerta. Nell'ambito di un'economia multisettoriale caratterizzata da mercati incompleti e vincoli di liquidità, ho utilizzato un impianto teorico rigorosamente fondato sui modelli dinamici stocastici di equilibrio generale (DSGE), evidenziando come le complementarità abbiano avuto un ruolo fondamentale nell'amplificare o smorzare gli effetti economici del Covid-19 e nel modificare la composizione disaggregata della funzione produttiva.

1. INTRODUZIONE

Lo scoppio della pandemia da coronavirus è uno spartiacque tra la fine e l'inizio di un'epoca. Così come altri eventi estremamente significativi per l'umanità, come la fine della II guerra mondiale, la caduta del muro di Berlino e il crollo delle Torri Gemelle, la pandemia da Covid-19 entrerà a far parte di quel ristrettissimo gruppo di eventi che hanno alterato il corso della storia. Sono già numerosi i campi in cui si sente parlare di un cambiamento nel metodo, nei criteri e nei procedimenti adottati dal periodo considerato pre-pandemico al periodo immediatamente successivo alla diffusione del virus. Anche la modellizzazione e la teoria macroeconomica non rimangono escluse dal novero di quelle materie che hanno subito un cambio di paradigma. Come già successo in passato, il verificarsi di grandi eventi nel corso della storia ha cambiato il modo in cui vengono analizzati gli schemi economici: dopo la Grande Recessione del '29 è nata la scuola keynesiana e prese importanza la spesa pubblica nei modelli economici, dopo le crisi petrolifere degli anni '70 e le conseguenti spinti inflazionistiche è nata la Teoria delle Aspettative Razionali, dopo la crisi dei mutui subprime i modelli iniziarono a considerare attentamente la stabilità sui mercati finanziari. La pandemia, con le sue particolari implicazioni macroeconomiche, ha portato alla

* Neolaurato in Economia e Finanza presso l'università Luiss Guido Carli, Roma

luce un importante limite dei moderni modelli neokeynesiani, ovvero la loro incapacità di distinguere i fenomeni che avvengono a livello intersettoriale. Infatti, poiché questi modelli sono tipicamente costituiti da un unico settore che riassume l'intero sistema economico-produttivo, risultano essere poco inclini nel modellizzare le caratteristiche di uno shock pandemico, che tra i suoi effetti primari ha quello di provocare uno spostamento delle preferenze individuali nella domanda finale delle famiglie. Tali variazioni sono la conseguenza del comportamento individualistico degli agenti, che per il timore di essere contagiati dal virus indirizzano le loro decisioni di spesa verso quei beni e servizi acquistabili in modalità remota, a discapito di quei beni che per essere consumati necessitano di un'elevata interazione sociale. Inoltre, in alcune fasi critiche dell'andamento epidemiologico del virus, i provvedimenti emanati dagli Stati per ridurre l'indice di trasmissione del contagio ha reso più difficile, se non addirittura impossibile, sostenere la domanda in determinati mercati reali. Pertanto, l'asimmetria con il quale il coronavirus ha colpito i diversi settori dell'economia deriva sia da una componente strettamente endogena al sistema, la risposta delle famiglie nell'aggiustare le preferenze di consumo, sia da un fattore esogeno come gli interventi legislativi volti a rallentare la diffusione del virus. Tuttavia, la pandemia non presenta esclusivamente effetti che avvengono in maniera localizzata e circoscritta a determinati settori del sistema, ma origina anche perturbazioni d'offerta e di domanda che colpiscono l'economia in maniera aggregata. Ad esempio, oltre a modificare la composizione interna della domanda, il comportamento individualistico dei consumatori include anche considerazioni di natura economico-decisionale intertemporale che possono essere modellizzate attraverso un classico *discount factor shock*. Infatti, è ragionevole supporre che le motivazioni individuali hanno influenzato anche le preferenze intertemporali degli agenti, riducendo l'utilità del consumo presente relativamente all'utilità del consumo futuro, spingendo le famiglie a scegliere di posticipare le decisioni di spesa a periodi futuri meno incerti. Gli effetti sull'offerta aggregata derivano invece dalle chiusure di numerosi comparti produttivi avvenute tra marzo ed aprile 2020. Esse hanno avuto la conseguenza di aver ridotto la capacità produttiva dell'economia sia perché sono diminuiti i tassi di occupazione e di partecipazione alla forza lavoro sia per il rallentamento del tasso di crescita della produttività. Quindi, data la complessità della situazione, è necessario esaminare un modello che tenga conto delle complementarità tra i beni e i fattori produttivi, in modo tale da poter descrivere le modifiche dirette e indirette nel network produttivo e isolare le varie implicazione di ogni singolo shock che la pandemia ha generato. Nella prima parte del modello verrà analizzata la risposta della domanda aggregata attraverso lo studio dell'Equazione di Eulero dei consumatori, in particolare tramite gli aggiustamenti del tasso d'interesse reale naturale, ovvero quel tasso che bilancia l'offerta di risparmio con la domanda per investimenti considerati privi di rischio. Dalla letteratura sui modelli di crescita neoclassica è noto che un rallentamento del tasso di crescita della popolazione, così come un aumento generale della propensione al risparmio, generi un effetto depressivo su tale tasso, che invece di esser accompagnata dalla distruzione di capitale come per le guerre è figlia di una riduzione della forza lavoro che Coibion et al. (2020) stimano attorno al

7% per l'attuale pandemia. Tuttavia, nel modello unisettoriale presentato nella prima sezione verrà dimostrato che qualora ci fosse un unico bene disponibile e l'economia dovesse esser colpita da uno shock occupazionale come quello causato dalla pandemia, allora, in un particolare contesto di vischiosità dei prezzi, il tasso d'interesse reale naturale aumenterebbe. Se la Banca Centrale dovesse scegliere di seguire una strategia finalizzata a riportare tale tasso al suo valore di stato stazionario, il modello implicherebbe per l'economia una condizione di eccesso di domanda, che a sua volta genererebbe spinte inflazionistiche che la Banca Centrale dovrebbe cercare di arginare attraverso un aumento dei tassi. Tale manovra avrebbe chiaramente conseguenze depressive sul livello dell'output, anche se la riduzione necessaria per riportare l'economia verso il nuovo equilibrio sarebbe d'entità inferiore rispetto alla perdita di prodotto causata dallo shock d'offerta. Contrariamente, in un framework bi-settoriale in cui ciascun settore produce un unico bene e la pandemia provoca la chiusura temporanea di uno dei due settori, se sono rispettati determinati valori per l'elasticità di sostituzione, il tasso d'interesse reale naturale subirebbe una diminuzione. Supponendo la medesima strategia da parte della Banca Centrale, la presenza di complementarità tra i due beni susciterebbe una recessione di natura keynesiana anche nel mercato lavorativo del settore non coinvolto dalla chiusura. Questo meccanismo di trasmissione endogeno interno alla domanda aggregata finirebbe per produrre una perdita d'output addirittura superiore allo shock esogeno originariamente creatosi sul lato dell'offerta. Nella seconda sezione, invece, si analizzerà più approfonditamente il problema d'ottimizzazione delle imprese specializzando ulteriormente il modello e arricchendolo di una moltitudine di settori che interagiscono tra di loro tramite una fitta rete relazionale. Per far ciò, verrà assemblata la struttura produttiva del sistema in maniera disaggregata unendo in un'unica matrice le industrie, i fattori produttivi e la domanda finale delle famiglie (considerata come un settore economico aggiuntivo). Oltre allo shock d'offerta provocato dalla chiusura di alcuni comparti produttivi già analizzato nel primo capitolo, verranno inseriti anche gli shock aggregati e intersettoriali della domanda, causati da uno spostamento delle preferenze intertemporali e intersettoriali delle famiglie. A causa dei meccanismi innescati dalle complementarità tra i fattori produttivi, il modello implica una traiettoria dell'output non lineare ed eterogenea a seconda che si consideri la riduzione della capacità produttiva, la minor spesa aggregata o le variazioni intersettoriali della domanda delle famiglie. In particolare, risultano due tipi di effetti dello shock pandemico: uno diretto, indipendente dalle complementarità intersettoriali e direttamente proporzionale all'entità del singolo shock, e uno indiretto dipendente dalle complementarità nella rete produttiva. Tali effetti indiretti implicano un moltiplicatore dello shock d'offerta maggiore dell'unità, avendo quindi un effetto amplificativo sulla variazione dell'output, mentre deriva per lo shock di domanda un moltiplicatore inferiore all'unità, implicando un effetto "stabilizzatore" che smorza gli effetti dello shock ma che tuttavia rende allo stesso tempo meno efficaci stimoli fiscali "generalizzati" volti a sostenere la domanda aggregata.

2. METODOLOGIA E RISULTATI

La modellistica adottata è di quelle più recenti. Si sono utilizzati i modelli noti *come Dynamic Stochastic General Equilibrium* (DSGE), ovvero modelli che descrivono l'andamento dei principali aggregati macroeconomici come il risultato di scelte ottimizzanti di famiglie e imprese, in un contesto di razionalità nella formazione delle aspettative. Il *setup* adottato sfrutta quindi le innovazioni e il rigore metodologico dei moderni modelli DSGE applicandoli al framework dei modelli multisettoriali. Quest'ultimi, sebbene siano usati in numerose applicazioni, vengono fondamentalmente utilizzati per compiere analisi input-output, ovvero un metodo analitico che attraverso l'uso dell'algebra matriciale descrive la ripartizione della spesa aggregata tra le varie industrie. La maggior parte della letteratura macroeconomica motivata dal coronavirus fa uso di questo particolare framework poiché riesce a descrivere in maniera consona i cambiamenti intercorsi nella catena del valore dopo lo scoppio della pandemia. Pertanto, si può imputare il coronavirus come il catalizzatore del rinato interesse verso questa classe di modelli, che negli ultimi anni aveva ceduto il passo ai più eleganti modelli DNK. Difatti, prima dell'avvento del coronavirus la letteratura si era concentrata prevalentemente sull'analisi dei fenomeni legati alla domanda, ad esempio, facendo diversi passi in avanti nello studio dell'eterogeneità tra gli agenti e nell'analisi del problema intertemporale delle famiglie, mentre poca attenzione è stata dedicata alla struttura produttiva e alla ricerca dei meccanismi che la influenzano. In questo modello la struttura d'offerta dell'economia segue le ultime ricerche di Emmanuel Farhi e David Baqaee, che attraverso l'aggregazione di relazioni e variabili microeconomiche (microfondazione) costruiscono una funzione di produzione multisettoriale che riesce a descrivere in maniera molto efficace ed elegante il comportamento delle principali variabili macroeconomiche. Inoltre, il modello presuppone che sia valida una versione del Teorema di Hulten (1978), per cui l'approssimazione del primo ordine di un TFP shock è uguale alla sommatoria degli shocks microeconomici settoriali ponderati per le relative quote di PIL, conosciute anche come *Domar's weights*, dalla celebre formula di aggregazione della TFP enunciata da Evsey Domar nel 1961. Tale teorema porta con sé la forte implicazione che se si conoscono *ex-ante* i valori d'equilibrio dei Pesi di Domar, la specificazione della struttura disaggregata dell'economia (matrice input-output, numero dei fattori produttivi, elasticità di sostituzione, distribuzione della ricchezza) è irrilevante nel determinare la variazione dell'output. Questo è possibile in virtù del fatto che il Teorema di Hulten non è altro che un'applicazione del Teorema dell'Inviluppo, pertanto le variazioni dei pesi degli shocks microeconomici sono neutrali alle fluttuazioni dell'output totale. Tuttavia, il modello prevede che se ci dovesse essere qualche forma di complementarità tra le varie industrie, la preposizione sopracitata cadrebbe in quanto si verificherebbero dei meccanismi di riallocazione delle risorse che pregiudicherebbero la linearità della relazione. La complementarità tra i diversi settori è stata modellata attraverso l'impostazione di un'elasticità di sostituzione soggetta a diversi limiti inferiori dipendenti dalle condizioni e al contesto di volta in volta analizzato. L'elasticità di sostituzione è un tipo di elasticità utilizzata in economia per misurare il grado di sostituibilità tra i diversi beni. Analiticamente, è data dal rapporto tra la variazione percentuale del rapporto tra l'utilizzo effettivo di due beni (o fattori produttivi nell'economia di produzione) e la variazione percentuale del loro saggio marginale di sostituzione (saggio marginale di sostituzione tecnica nell'economia di produzione). Assumendo valide le ipotesi di scuola neoclassiche di uguaglianza tra i prezzi relativi e saggio marginale di sostituzione, e ricordando che il tasso di variazione di un rapporto è dato dalla differenza nei tassi di variazione di numeratore e denominatore, l'elasticità di sostituzione può esser interpretata come un parametro che indica il grado di sostituibilità dei beni (o dei fattori produttivi). Allora, se il valore dell'elasticità di sostituzione è inferiore all'unità e si dovesse verificare un aumento nel prezzo di uno dei due beni (o del fattore produttivo), la variazione del rapporto d'utilizzo tra di essi si modificherebbe meno che proporzionalmente. La spiegazione economica di ciò è data dal fatto che i due beni possono essere considerati complementari, ovvero è necessario il loro utilizzo congiunto per soddisfare un determinato bisogno. Un ulteriore risultato, subordinato alla presenza/assenza delle complementarità intersettoriali, è il limite delle funzioni Cobb-Douglas nel misurare gli effetti indiretti di una variazione della composizione disaggregata della struttura produttiva. Tale tipologia di funzioni, in virtù delle loro proprietà matematiche che implicano un'elasticità di sostituzione tra i beni (fattori produttivi) costante ed unitaria, rende le variazioni delle quote di mercato dei fattori produttivi neutrali alle fluttuazioni dell'output. Infatti, se la funzione di produzione ha un rendimento di scala costante e i fattori sono rimunerati secondo la produttività marginale, la parte relativa di un fattore nel PIL dipende dall'elasticità di sostituzione. Quando l'elasticità è superiore all'unità, la parte relativa del fattore che cresce di più aumenta, se l'elasticità è unitaria questa parte resta costante. Pertanto, in un'economia *a là* Cobb-Douglas le relazioni tra i beni intermedi utilizzati nel processo produttivo hanno dei rapporti costanti e ininfluenti alle variazioni delle altre grandezze macroeconomiche. L'ampio utilizzo delle funzioni Cobb-Douglas nella modellizzazione macroeconomica e il successo dei lavori di Evsey Domar e di Charles R. Hulten hanno avuto l'effetto di far allontanare la ricerca dai modelli multisettoriali e dalle analisi input-output. Tuttavia, lo scoppio della pandemia ha pregiudicato questa visione statica del mondo in cui non si verificano cambiamenti nei rapporti distributivi dei fattori produttivi e tra le varie industrie. In realtà, queste variazioni giocano un ruolo estremamente importante nel determinare la dimensione dello shock e guidare l'economia verso un nuovo equilibrio.

3. IL PROBLEMA INTERTEMPORALE DELLE FAMIGLIE

Si supponga che l'economia sia abitata da un cospicuo numero di famiglie con le stesse preferenze rappresentate da una funzione d'utilità intertemporale:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t). \tag{1}$$

Tale formulazione implica che l'utilità delle famiglie al tempo $t=0$ sia la somma ponderata di tutti i flussi d'utilità futuri. $\beta \in [0,1]$ è il fattore di sconto stocastico delle famiglie e un suo valore positivo implica che l'utilità attesa dei periodi più prossimi è preferita ai flussi di utilità più lontani nel tempo. La funzione $U(c_t)$ è una funzione d'utilità standard con elasticità costante (CES) che assume la seguente forma funzionale:

$$U(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \tag{2}$$

c_t rappresenta il consumo delle famiglie al tempo t, σ è il coefficiente di avversione relativa al rischio e $1/\sigma$ misura l'elasticità di sostituzione intertemporale del consumo. In tale funzione d'utilità non compare la disutilità generata dalle unità lavorative offerte dalle famiglie alle imprese perché ogni famiglia possiede una dotazione di $\bar{n} > 0$ unità di lavoro fornite in modo inelastico (dove $\bar{n}$ è il numero massimo di unità che una famiglia può offrire). Le famiglie affrontano un problema d'ottimizzazione stocastica intertemporale in cui cercano di massimizzare la funzione obiettivo $U(c_t)$ soggetta al vincolo di bilancio rappresentante la loro capacità di spesa:

$$c_t \leq w_t n_t, \tag{3}$$

dove w_t è il salario al quale viene remunerato il fattore lavoro.

Per quanto riguarda la configurazione della struttura d'offerta, per ora ci occorre soltanto esplicitare che le imprese operano in una condizione di competizione perfetta e la tecnologia al quale le imprese devono sottostare per massimizzare la loro funzione di profitto segue la semplice legge di produzione:

$$Y_t = N_t = \mathbb{C}_t\,. \tag{4}$$

3.1 Shock Occupazionale

La modellizzazione dello shock replica le caratteristiche fondamentali della pandemia, ipotizzando che una frazione $\phi>0$ degli agenti è inabilitata a fornire la loro offerta di lavoro nel periodo $t = 0$ a causa delle politiche di contenimento decise dal decisore politico. Mentre, dal periodo $t>0$ in avanti si assume che gli agenti tornino in una condizione di pieno impiego $\bar{n}$. Si potrebbe dunque sostenere che non sia stato tanto lo scoppio del coronavirus in sé l'origine della crisi, ma la risposta dei governi nel chiudere preucazionalmente i settori ad alto tasso d'interazione sociale. Pertanto, l'obiettivo non è tanto quello di delinare una situazione in cui sia possibile eliminare completamente la perdita di output, ciò sarebbe realizzabile soltanto non ordinando la chiusura delle attività considerate a rischio, pagando tuttavia un prezzo economico-sociale ben più elevato. Piuttosto, l'obiettivo dei decisori politici dovrebbe essere quello di ridurre il calo dell'occupazione in quei settori ancora rimasti aperti.

3.2 Equazione di Eulero

Introduciamo lo shock supponendo che al tempo $t=0$ l'offerta di lavoro dell'agente rappresentativo a causa della pandemia diminuisca da $\bar{n}$ a $(1- \phi)\bar{n}$ e analizziamo la risposta dell'economia attraverso la variazione del tasso di interesse reale naturale. Sostituendo i livelli d'occupazione nell'equazione di Eulero si ottiene la condizione:

$$U'\big((1- \phi)\overline{n}\big) = \beta(1 + r_0)U'(\overline{n}) \tag{5}$$

e riordinando i termini dell'equazione

$$1 + r_0 = \frac{1}{\beta}\frac{U'\big((1- \phi)\overline{n}\big)}{U'(\overline{n})} > \frac{1}{\beta}, \tag{6}$$

dove il tasso d'interesse reale naturale è sopra il suo livello di lungo periodo $1/\beta$. Tale incremento è sintomo dell'assenza di alcun meccanismo di propagazione dello shock d'offerta alla domanda. Per dimostrare tale intuizione, si consideri nel modello la presenza di qualche forma di rigidità nominale. Ad esempio, si supponga che i salari siano rigidi verso il basso, acconsentendo a una possibile situazione di disoccupazione. Inoltre, si ipotizzi che la Banca Centrale (BC) voglia assicurare una condizione di pieno impiego $c_t=\bar{n}$ in tutte le date future $t>0$, mentre in $t=0$ provi a tenere il tasso di interesse reale naturale pari al suo livello di stato stazionario $1/\beta-1$. Sostituendo quest'ultimo nell'equazione di Eulero si può notare che i consumi sono interamente determinati dalla condizione *forward looking*:

$$U'(c_0) = U'(\overline{n}) \tag{7}$$

che è ovviamente verificata per $c_0=\bar{n}$. Tale condizione implica che la domanda aggregata non subisce variazioni, mentre l'offerta aggregata cala al nuovo livello $(1-\phi)\,\bar{n}$. L'eccesso di domanda causerà un aumento dei salari reali che provocherà una spinta inflazionistica che la BC dovrà cercare d'arginare alzando il tasso d'interesse reale. Tuttavia, questo non può essere un nuovo equilibrio per il sistema, il tasso d'interesse reale dovrà infatti collocarsi su una traiettoria verso il suo livello di lungo periodo.

3.3 Mercati Incompleti

Consideriamo il medesimo modello in un contesto di incompletezza dei mercati. Supponiamo che il numero di famiglie sia indicizzato con $i \in [0,1]$ e ciascuna famiglia massimizzi la funzione di utilità (1) soggetta al vincolo di bilancio:

$$c_{it} + a_{it} \leq w_t n_{it} + (1 + r_{t-1})a_{it-1}, \tag{8}$$

in cui ogni agente ha accesso ad un bond annuale con un tasso di rendimento r_t.

Per la frazione $(1-\phi)$ di agenti non interessati dallo shock l'offerta di lavoro $\bar{n}_{it}$ è uguale a quella di piena occupazione $\bar{n}$, mentre per la frazione ϕ di agenti colpiti è $\bar{n}_{it}=0$. Si consideri l'incompletezza di mercato come un vincolo di liquidità,

$$a_{it} \geq 0\,, \tag{9}$$

che vale solo per una frazione $\mu \in [0,1]$ delle famiglie, implicando dunque una forma di eterogeneità.

Gli agenti "vincolati" che hanno perso il loro lavoro in seguito allo shock hanno visto azzerarsi il proprio salario e per via del vincolo di liquidità (9) anche la loro spesa per consumi, $c_{it}=0$.

Tutti gli altri agenti, invece, si trovano ancora sulla loro equazione di Eulero:

$$U'(c_{i0}) = \beta(1 + r_0)U'(c_{i1}). \tag{10}$$

In virtù delle proprietà della funzione d'utilità CES, che è una funzione monotona omogenea di grado 1, le preferenze dei consumatori sono omotetiche e quindi possono essere rappresentate a livello aggregato tramite un unico "consumatore rappresentativo":

$$U'(\mathbb{C}_{\mathbf{0}}) = \beta(1 + r_0)U'(\mathbb{C}_{\mathbf{1}}). \tag{11}$$

Inoltre, la condizione di equilibrio sul mercato dei beni deve valere in ogni periodo $t>0$,

$$\mathbb{C}_t + \mu\phi\overline{n} = \overline{n} \tag{12}$$

e al tempo $t=0$,

$$\mathbb{C}_0 = (1 - \phi)\overline{n}. \tag{13}$$

la condizione (12) implica che la parte di consumi spettante agli agenti vincolati in situazione di stato stazionario è $\mu\phi\bar{n}$. Inoltre, dato che nel periodo $t=0$ tali agenti non consumano nulla, il consumo totale è composto solo dalla quota degli agenti non colpiti dallo shock, come evidenziato in (13).

Sostituendo le equazioni (12) e (13) nell'equazione di Eulero per i consumi (10) si ha l'uguaglianza

$$U'\big((1 - \phi)\overline{n}\big) = \beta(1 + r_0^*)U'\big((1 - \phi\mu)\overline{n}\big) \tag{14}$$

e isolando il termine $(1+r_0^*)$ si ottiene

$$1 + r_0^* = \frac{1}{\beta}\frac{U'\big((1 - \phi)\overline{n}\big)}{U'\big((1 - \phi\mu)\overline{n}\big)} \geq \frac{1}{\beta}. \tag{15}$$

Anche in questo caso il tasso d'interesse reale naturale aumenta in risposta allo shock sul mercato del lavoro. Tale conseguenza deriva dal desiderio degli agenti non vincolati di distribuire uniformemente nel tempo i loro consumi, rendendo così la domanda per consumi C_0 maggiore dell'offerta di lavoro $(1-\phi)\bar{n}$. Pertanto, tale disequilibrio porta il tasso di interesse reale naturale ad aumentare. Tuttavia, in un'economia con mercati incompleti non tutti gli agenti si trovano sulla loro Equazione di Eulero, alcuni soggetti non sono in grado di distribuire i consumi come vorrebbero, riducendo così la necessità del tasso di interesse reale naturale di aumentare. Infatti, nel caso limite $\mu=1$, in cui tutti gli agenti sono sottoposti al vincolo di liquidità (9), il tasso d'interesse reale naturale rimane invariato.

Riconsiderando la medesima strategia della BC finalizzata a mantenere il tasso di interesse naturale al suo livello di lungo periodo $r_0^*=1/(\beta-1)$ e sostituendo i livelli di consumo (12) e (13) nell'equazione di Eulero si ottiene:

$$U'\big((1 - \phi)\overline{n}\big) = U'\big((1 - \phi\mu)\bar{n}\big) \tag{16}$$

che implica l'uguaglianza

$$\mathbb{C}_0 = (1 - \mu\phi)\bar{n}. \tag{17}$$

Quindi, come nel modello con mercati completi, la domanda di consumo di beni e servizi eccede la sua offerta, $(1-\mu\phi)\bar{n} \geq (1-\phi)\bar{n}$. Il mercato lavorativo sperimenta ancora una volta un *boom* a meno che tutti gli agenti non colpiti dallo shock siano soggetti al vincolo di liquidità (9).

In quest'ultimo caso, essi dovranno tagliare la loro spesa per consumi esattamente di $\bar{n}$ unità, il che implica una propensione marginale al consumo uguale a 1. Quindi, a livello aggregato, lo shock provoca una riduzione di $\phi\bar{n}$ unità di offerta di lavoro e $\phi\bar{n}$ unità di domanda di beni. La condizione di equilibrio sul mercato del lavoro rimane valida senza che nessun agente modifichi il suo comportamento e senza che il tasso d'interesse reale si aggiusti.

3.4 Il Modello bi-settoriale

Aggiungiamo al modello un settore tale che $j=1,2$. Inoltre, si supponga che una frazione ϕ degli agenti lavori nel settore 1, mentre una frazione $(1-\phi)$ lavori nel settore 2.

Supponiamo che a causa delle politiche di contenimento contro la diffusione del virus il settore 1 venga temporaneamente chiuso, mentre produzione e consumo nel settore 2 continuino a operare normalmente poiché non è necessario per consumatori e produttori incontrarsi di persona.

Le preferenze delle famiglie sono ora rappresentate dalla nuova funzione di utilità:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_{1t}, c_{2t}) \tag{18}$$

dove

$$U(c_{1t}, c_{2t}) = \frac{1}{1-\sigma} (\varphi^\rho {c_{1t}}^{1-\rho} + (1-\varphi)^\rho {c_{2t}}^{1-\rho})^{\frac{1-\sigma}{1-\rho}}. \tag{19}$$

La funzione d'utilità (19) è caratterizzata da un'elasticità di sostituzione tra i beni $1/\rho$ e da un'elasticità di sostituzione intertemporale $1/\sigma$ costante (si supponga $\rho<1$).

Prima dell'arrivo della pandemia l'economia si trova in una condizione di stato stazionario che prevede i valori d'equilibrio

$$c_1^* = Y_1^* = \varphi\bar{n}, \qquad c_2^* = Y_2^* = (1-\varphi)\bar{n}. \tag{20}$$

Data la simmetria del modello, il prezzo relativo del bene 1 in termini del bene 2 è dato da

$$p^* = 1 \tag{21}$$

e il livello del tasso d'interesse reale in termini del bene 2 è definito come

$$1 + r_t \equiv (1 + i_t)\frac{P_{2t}}{P_{2t+1}}, \tag{22}$$

dove i_t è il tasso d'interesse nominale.

L'equazione di Eulero che determina l'allocazione intertemporale dei consumi degli agenti è

$$U_{cj}(c_{1t}, c_{2t}) = \beta(1 + r_t)U_{cj}(c_{1t+1}, c_{2t+1}), \tag{23}$$

dove U_{cj} è la derivata parziale della funzione d'utilità rispetto al consumo del bene C_{jt}.

In $t=0$, la produzione del bene 1 è costretta ad interrompersi a causa delle restrizioni governative,

$$c_{10} = Y_{10} = n_{10} = 0. \tag{24}$$

Ovviamente, non c'è più una condizione di pieno impiego nel settore 1. Per i fini del modello è più interessante vedere cosa accade nel settore 2, che non è stato colpito direttamente dallo shock. Usando l'equazione di Eulero dell'agente rappresentativo (23) si ottiene:

$$1 + r_0 = \frac{1}{\beta}\frac{U_{c2}(0, c_2^*)}{U_{c2}(c_1^*, c_2^*)}, \tag{25}$$

che analiticamente equivale a

$$1 + r_0 = \frac{1}{\beta}\left[\frac{\frac{1}{\bar{n}^{\sigma}}(1-\varphi)^{\frac{\rho-\sigma}{1-\rho}}}{\frac{1}{\bar{n}^{\sigma}}}\right]. \tag{26}$$

Quindi, il tasso d'interesse reale naturale subisce una riduzione se e solo se

$$(1-\varphi)^{\frac{\rho-\sigma}{1-\rho}} < 1. \tag{27}$$

Tale disequazione è soddisfatta per $\rho > \sigma$, ovvero se l'elasticità di sostituzione tra i due beni è inferiore all'elasticità di sostituzione intertemporale

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{\sigma}\ . \tag{28}$$

L'interpretazione di questo risultato è chiara, se l'ineguaglianza (28) è soddisfatta i due beni possono essere definiti come complementari, ovvero è necessario il loro utilizzo congiunto per la soddisfazione di un determinato bisogno. Pertanto, una riduzione dell'utilità marginale generata dal consumo dei beni che richiedono interazioni sociali riduce anche l'utilità marginale dei restanti beni nell'economia. Per incentivare i consumatori nel continuare ad acquistare abbastanza quantità del bene 2, quindi mantenere la condizione di pieno impiego $\bar{n}_2$, occorre una diminuzione del tasso d'interesse reale. Per evitare una caduta della domanda aggregata è necessario che ci sia un'elevata sostituibilità tra i due settori, poiché gli unici percettori di reddito dovranno trasferire la loro quota di spesa che prima era allocata per il bene 1 sul bene 2. Tuttavia, se questi non sono sostituti, la domanda di tali beni si contrarrà più dell'offerta, riducendo l'occupazione anche nel settore non affetto direttamente dallo shock. Per dimostrare quanto detto analiticamente, analizziamo la reazione della domanda aggregata ipotizzando valida la condizione (28) e prevedendo il comportamento della BC finalizzato a mantenere il tasso d'interesse reale naturale al suo livello di lungo periodo $1/\beta-1$. Una situazione del genere porterebbe ad una recessione keynesiana nel settore ancora rimasto aperto, la riduzione dell'attività economica è riassunta dal rapporto tra la domanda e l'offerta di lavoro:

$$\frac{n_{20}}{\bar{n}} = (1-\varphi)^{\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\rho-\sigma}{1-\rho}\right)}. \tag{29}$$

L'economia sperimenta quindi due tipi di perdita occupazionale: una perdita inevitabile $\varphi\bar{n}$ conseguente alla chiusura del settore 1 e una perdita "inefficiente" ($n_{20}-\bar{n}$) causata da un'insufficiente domanda nel settore 2.

Si supponga ora che una frazione μ degli agenti $i\in[0,1]$ è soggetta al vincolo di liquidità $a_{it}\geq 0$.

Data la natura della funzione d'utilità, che prefigura preferenze omotetiche, possiamo utilizzare l'aggregazione di Gorman e considerare i consumi dei beni come C_{1t} e C_{2t}. Quindi, se l'equazione di Eulero è valida individualmente lo sarà anche a livello aggregato:

$$1+r_0 = \frac{1}{\beta}\frac{U_{c2}(0,\mathbb{C}_{20})}{U_{c2}(\mathbb{C}_{11},\mathbb{C}_{21})}. \tag{30}$$

In $t=0$, La condizione d'equilibrio sul mercato del bene 2 sarà data da

$$\mathbb{C}_{20} = (1-\varphi)\bar{n}. \tag{31}$$

In $t\geq 0$, il gruppo degli agenti che non ha perso il lavoro o non è soggetta alla (9) avrà un reddito pari a $(1-\varphi\mu)\bar{n}$ e consumerà una frazione φ nel bene 1 e una frazione $(1-\varphi)$ nel bene 2.

$$\mathbb{C}_{11} = \varphi(1-\varphi\mu)\bar{n}, \quad \mathbb{C}_{21} = (1-\varphi)(1-\varphi\mu)\bar{n}. \tag{32}$$

Pertanto, i consumi aggregati nei due settori risulteranno:

Sostituendo i livelli di consumo sopracitati nell'equazione di Eulero (30) si ottiene la condizione:

$$1+r_0 = \frac{1}{\beta}(1-\varphi)^{\frac{\rho-\sigma}{1-\rho}}(1-\varphi\mu)^{\sigma}. \tag{33}$$

Si noti che se non è presente alcun tipo di restrizione sul mercato del lavoro, $\varphi=0$, il tasso d'interesse reale naturale rimane immutato al livello $1/\beta$. Se si considerasse una manifestazione positiva dello shock, $\varphi>0$, differenziando l'espressione (33) rispetto a φ e controllando che il segno della derivata prima sia negativa si può concludere che lo shock d'offerta si traduce in una diminuzione del tasso reale naturale se e solo se

$$\frac{1}{\sigma} > \frac{1-\mu}{1-\varphi\mu}\cdot\frac{1}{\rho} + \frac{\mu(1-\varphi)}{1-\varphi\mu}\ . \tag{34}$$

La condizione (34), analogamente alla (28) per la configurazione a mercati completi, fornisce un limite inferiore all'elasticità di sostituzione intertemporale per provocare una caduta del tasso d'interesse reale naturale. Tale condizione è meno stringente della precedente, poiché richiede che l'elasticità di sostituzione intertemporale $1/\sigma$ sia compresa tra una combinazione convessa di $1/\rho$ e 1. Inoltre, tale combinazione converge ad 1 per $\mu\to 1$. Quindi, nel caso speciale in cui il vincolo di liquidità (9) sia valido per tutti gli agenti la condizione si riduce semplicemente a

$$\frac{1}{\sigma} > 1, \tag{35}$$

che sorprendentemente non dipenderebbe più dall'elasticità di sostituzione $1/\rho$.

Infine, analizzando la risposta della domanda aggregata utilizzando come *proxy* il rapporto tra la domanda e l'offerta di lavoro sul mercato del bene 2,

$$\frac{n_{20}}{\bar{n}} = (1-\varphi\mu)(1-\varphi)^{\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\rho-\sigma}{1-\rho}\right)}, \tag{36}$$

possiamo notare che maggiore è la frazione μ degli agenti soggetta al vincolo di liquidità (9), maggiore è la ricaduta della domanda aggregata. infatti, a differenza degli agenti non vincolati, le decisioni di consumo di tali agenti verrebbero tagliate proporzionalmente alla perdita del loro reddito, e nel caso in cui ci fossero complementarità tra i settori il crollo della spesa non verrebbe compensato dalla maggior domanda da parte dei primi. Tale situazione provocherebbe una caduta della domanda aggregata maggiore di quella prevista nel modello a mercati completi e addirittura superiore allo shock d'offerta originario.

4 IL PROBLEMA INTRATEMPORALE DELLE IMPRESE

Nella sezione precedente abbiamo presentato un modello in cui il livello di sostituibilità tra i settori è determinante nel propagare lo shock all'interno della domanda aggregata. Dato che il *focus* era sul comportamento delle famiglie, si è adottata una legge di produzione estremamente semplice, si sono tralasciati per esempio considerazioni riguardanti la presenza di beni intermedi nel processo produttivo, l'elasticità di sostituzione tra i fattori produttivi e le quote di quest'ultimi nella composizione del PIL. Pertanto, in questa sezione completeremo l'analisi degli effetti del coronavirus aggiungendo questi elementi e complicando la struttura d'offerta.

4.1 Le Famiglie

Si supponga un modello di equilibrio generale in cui esiste un insieme di N industrie e un insieme di fattori di produzione G. Ogni famiglia è dotata di una sola unità di un solo fattore produttivo $f \in G$ dove il totale è normalizzato ad 1 per ciascun periodo $(\bar{L}_f = 1)$. Continuiamo ad assumere l'omogeneità delle preferenze e che la situazione di disoccupazione avvenga via *extensive margin*, ovvero tenendo in considerazione quante persone sono impiegate nel processo produttivo e non per quante ore lo siano. Quindi, se qualche fattore f non è completamente impiegato $(L_f \leq 1)$, significa che $1\text{-}L_f$ lavoratori sono in uno stato di non occupazione, mentre la parte rimanente L_f è considerata attiva. Infine, manteniamo l'ipotesi per cui una frazione $\mu \in [0,1]$ degli agenti è soggetta ad un vincolo di liquidità. La funzione d'utilità delle famiglie è del tutto analoga a quella vista nella sezione precedente, si differenzia solamente per la notazione e poiché include esplicitamente oltre l'utilità prodotta dal consumo presente anche il valore scontato di quella attesa per il futuro:

$$U(y, y_*) = \frac{y^{1-1/\sigma} - 1}{1 - 1/\sigma} + \beta \frac{y_*^{1-1/\sigma} - 1}{1 - 1/\sigma}. \tag{37}$$

y e y_* rappresentano rispettivamente il livello di consumo presente e futuro, $\beta \in [0,1]$ è il fattore di sconto stocastico delle famiglie e $1/\sigma$ misura l'elasticità di sostituzione intertemporale. Dato che gli agenti che lavorano e quelli che non sono soggetti al vincolo di liquidità hanno le stesse preferenze possiamo aggregarli in un singolo agente rappresentativo che chiameremo "agente ricardiano". Quest'ultimi sono soggetti al vincolo di bilancio:

$$p^y y + \frac{p_*^y y_*}{1+i} = \sum_{f \in \mathcal{G}} w_f L_f + \sum_{f \in \mathcal{G}} \frac{w_f^* L_f^*}{1+i} \big(1 - (1 - L_f)\mu\big), \tag{38}$$

dove p^y e p_*^y sono rispettivamente i prezzi per il consumo presente e futuro, i è il tasso di interesse nominale e w_f e w_f^* sono il salario nominale presente e futuro. Dal vincolo di bilancio degli agenti ricardiani si deduce che il valore attuale della spesa per consumi deve eguagliare il valore attuale del reddito. Il secondo termine alla destra dell'uguale implica che nel periodo futuro non tutto l'output sarà prodotto dagli agenti ricardiani, dato che si presuppone che anche gli agenti non ricardiani ritornino a ricevere regolarmente un reddito. Il consumo aggregato intra-periodale che include i singoli livelli di consumo per i diversi beni esistenti nell'economia può essere riassunto dall'aggregatore CES:

$$y = \left(\sum_{j\in\mathcal{N}} \omega_{0j} c_j^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right)^{\frac{\theta}{\theta-1}}. \tag{39}$$

c_j è la quantità del bene j consumata dalle famiglie, θ è l'elasticità di sostituzione tra i diversi beni prodotti dall'economia e ω_{0j} è il parametro che misura le preferenze delle famiglie per il bene j, in equilibrio di steady state è normalizzato ad 1 così che la ripartizione settoriale dei consumi non è determinante nell'allocazione delle risorse prima dello shock.

Aggregando il livello di consumo per ogni bene j-esimo si ottiene un vettore che racchiude il consumo totale e inoltre, continuando a ipotizzare che tutto il reddito sia consumato *(Y=C)*, si ha l'uguaglianza

$$Y = \mathcal{C}(c_1, \dots, c_j, \dots, c_{\mathcal{N}}; \omega_{\mathcal{D}}). \tag{40}$$

Il vettore dei prezzi p^y relativo ai consumi risulta essere

$$p^Y = \mathcal{P}(p_1, \dots, p_j, \dots, p_{\mathcal{N}}; \omega_{\mathcal{D}}), \tag{41}$$

dove P è l'indice dei prezzi relativo all'indice dei consumi C, mentre ω_D è il vettore che raccoglie i parametri di preferenza. Dati gli indici sopramenzionati, denotiamo il PIL nominale come

$$E = \sum_{i\in\mathcal{N}} p_i c_i = p^Y \cdot Y. \tag{42}$$

4.2 Le Imprese

Si presume che l'economia sia caratterizzata da una rete relazionale di scambi commerciali tra tutti i diversi produttori che vi abitano. Ogni produttore risolve un problema di ottimizzazione vincolata massimizzando la funzione di profitto:

$$\pi_i = \max_{y_i, x_{ij}, l_{if}} p_i y_i - \sum_{j\in\mathcal{N}} p_j x_{ij} - \sum_{f\in\mathcal{G}} w_f L_{if} \tag{43}$$

sotto il vincolo rappresentante la legge di produzione di ogni industria i-esima

$$y_i = A_i F_i\left(\{x_{ij}\}_{j\in\mathcal{N}}, \{l_{if}\}_{f\in\mathcal{G}}\right). \tag{44}$$

A_i è un indice di produttività settoriale Hicks-neutral, ovvero un parametro che misura il progresso tecnologico dell'economia senza modificare il saggio marginale di sostituzione tecnica, y_i è la quantità del bene prodotta da $i \in N$, x_{ij} e l_{if} sono rispettivamente i beni intermedi utilizzati e i fattori impiegati dall'industria i-esima. Inoltre, si assuma che F_i implichi ritorni di scala costanti[1]

$$F_i = \left(\sum_{j\in\mathcal{N}} \omega_{ij} x_{ij}^{\frac{\theta-1}{\theta}} + \sum_{f\in\mathcal{G}} \omega_{if} l_{if}^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right)^{\frac{\theta}{\theta-1}}, \tag{45}$$

dove i parametri ω_{ij} e ω_{if} determinano endogenamente la struttura di produzione di questa economia, specificando il peso relativo dei fattori e dei beni intermedi nel processo produttivo, mentre θ misura l'elasticità di sostituzione tra gli input. Un'osservazione fondamentale per il modello è quella che l'elasticità di sostituzione θ è costante, uniforme e uguale a quella dei consumi. Inoltre, per $\theta = 1$, la funzione di produzione converge ad una funzione di tipo Cobb-Douglas.

4.3 Equilibrio

Assumiamo una condizione di equilibrio sul mercato dei beni in un contesto di competizione perfetta e prezzi flessibili. In particolare, l'equilibrio implica che la quantità totale di ogni bene j-esimo sia uguale alla quantità usata dalle imprese e dalle famiglie:

$$y_j = \sum_{i\in\mathcal{N}} x_{ij} + c_j \,. \tag{46}$$

Diversamente, il mercato dei fattori può essere in una situazione subottimale a causa di rigidità nominali. Consideriamo la domanda totale per singolo fattore f come:

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} l_{if} = L_f \,. \tag{47}$$

Ogni fattore di mercato f è in equilibrio se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

$$\left(w_f - \overline{w}_f\right)\left(L_f - \bar{L}_f\right) = 0, \quad \overline{w}_f \leq w_f, \quad L_f \leq \bar{L}_f. \tag{48}$$

Il parametro $\bar{w_f}$ è la remunerazione minima del fattore f, mentre $\bar{L}_f \leq 1$ è la quantità di equilibrio stazionario (che può essere inferiore al livello di pieno impiego $L_f = \bar{L}_f = 1$). Per considerare una situazione di flessibilità dei salari possiamo semplicemente imporre $\bar{w_f} = -\infty$. In pratica, si ha una condizione di equilibrio in due diverse

1. La funzione di produzione utilizzata segue il lavoro di Mckenzie (1959) in cui ogni industria ha un rendimento di scala uniforme e costante e una componente di produttività specifica legata al progresso tecnico di quel determinato settore economico.

situazioni: una possibilità è quando il salario nominale è superiore al suo livello minimo, $w_f \geq \bar{w}_f$, implicando quindi che l'utilizzo del fattore è al suo livello potenziale $L_f = \bar{L}_f$. Questa condizione verrà chiamata *supply-constrained* e rappresenta un sottoinsieme del totale dei fattori $S \subseteq G$. L'altra possibilità prevede una situazione in cui la remunerazione del fattore f è $w_f = \bar{w}_f$, di conseguenza il suo livello d'impiego è inferiore al suo livello di steady state $L_f \leq \bar{L}_f$. Tali fattori sono in una situazione denominata *demand-constrained* e il sottoinsieme di questi fattori sarà indicato con $D \subseteq G$. In quest'ultimo caso la disoccupazione $L_f \leq \bar{L}_f$ è causata dalla scarsa domanda del bene prodotto con l'input f. Pertanto, tale disoccupazione prenderà il nome di *keynesian unemployment*. Ci concentreremo principalmente su due casi distinti: nel primo il parametro $\bar{w}_f$ è uguale al suo livello d'equilibrio pre-shock, denotando l'insieme di questi fattori come $L \subseteq G$. Nel secondo caso si assume che tale parametro sia flessibile ($\bar{w}_f = -\infty$) e che il mercato di questi fattori $K \subseteq G$ sia sempre in una condizione d'equilibrio. Si può pensare per semplicità che L rappresenti il fattore lavoro, mentre K il fattore capitale. Ovviamente, $L \subseteq D$ e $K \subseteq S$.

4.4 Domanda Aggregata

Risolvendo il problema d'ottimizzazione delle famiglie, dalle condizioni del primo ordine si può ricavare l'equazione di Eulero dei consumi per gli agenti ricardiani:

$$y = y_* \left[\beta(1+i)\frac{p^y}{p_*^y}\right]^{-\sigma}. \tag{49}$$

Aggregando i consumi degli agenti ricardiani e quelli disoccupati o vincolati, che ricordiamo essere nulli, otteniamo un'equazione che mette in relazione l'output totale presente con quello futuro,

$$Y = \bar{Y}_* \left(\sum_{f \in \mathcal{G}} w_f^* L_f^* \left(1 - \left(1 - L_f\right)\mu\right)\right)\left[\beta(1+i)\frac{p^y}{p_*^y}\right]^{-\sigma}. \tag{50}$$

Dove $\sum_{f \in \mathcal{G}} w_f^* L_f^* (1 - L_f)\mu$ rappresenta la quota futura di output spettante agli agenti non ricardiani. Log-linearizzando l'equazione di Eulero per l'agente rappresentativo ricardiano e differenziando nel continuo le variabili endogene del modello possiamo derivare una scheda di domanda aggregata (AD) negativamente inclinata nel piano reddito-prezzi:

$$d \log Y = -\sigma d \log p^y + d \log \zeta + d \log \Theta, \tag{51}$$

dove

$$d\ log\ \zeta = d\ log \bar{Y}_* - \sigma\left(d\ log\ \beta + d\ log(1+i) - d\ log\ p_*^y\right), \tag{52}$$

e

$$d \log \Theta = \sum_{f \in \mathcal{G}} d \log w_f^* L_f^* \left(1 - \left(1 - L_f\right)\mu\right). \tag{53}$$

d log ζ e *d log* θ sono delle intercette che rappresentano rispettivamente uno shock di domanda aggregata esogeno e uno shock di domanda aggregata endogeno. Una realizzazione positiva del primo può avvenire in seguito ad un aumento delle aspettative sul futuro livello di output, una riduzione del tasso di interesse nominale o del fattore di sconto stocastico o alternativamente un aumento delle aspettative future dell'indice dei prezzi. La seconda intercetta cattura invece la riduzione di spesa nominale conseguente allo shock sul fattore f, dato che una frazione $\mu \in [0,1]$ di tali agenti è soggetta al vincolo di liquidità. Quindi, coerentemente con quanto evidenziato nella prima sezione, una riduzione $d \log L_f < 0$ dell'occupazione può generare un meccanismo di trasmissione endogeno alla domanda data la presenza di agenti non ricardiani.

4.5 Matrice Inversa di Leontief

Semplifichiamo leggermente la notazione aggregando quelli che sono i fattori f e i beni intermedi x_i usando L_{if} o $x_{i(N+f)}$ per indicare il livello d'utilizzo di un determinato input dall'industria i-esima. Consideriamo la domanda finale dei beni da parte delle famiglie come un bene addizionale fornito dal produttore o usando l'aggregatore della domanda (39) e scriviamo $1+N$ per indicare l'unione dei set $\{0\} \cup N$, e $1+N+G$ l'unione di $\{0\}$, N e G. Realizzando questa operazione di unione tra i diversi insiemi del sistema economico possiamo raffigurare ogni mercato in una singola matrice Ω input-output che include le famiglie, produttori e i fattori. Ω è una matrice quadrata $(1+N+G)\times(1+N+G)$ in cui ogni elemento ij-esimo rappresenta quello che viene chiamato coefficiente di input, ovvero indica la percentuale di reddito del settore i allocata per l'acquisto del bene intermedio prodotto dal settore j:

$$\Omega_{ij} = \frac{p_j x_{ij}}{p_i y_i} = \frac{p_j x_{ij}}{\sum_{k \in \mathcal{N}+\mathcal{G}} p_k x_{ik}} \,. \tag{54}$$

Essa mostra l'esposizione diretta di un settore all'altro, nelle analisi input-output prende il nome di matrice strutturale dato che contabilizza tutti i flussi economici che avvengono tra i vari settori dell'economia in un prestabilito arco temporale. Se la matrice inversa dei coefficienti $(1 - \Omega)^{-1}$ dovesse esistere[2], allora esiste un'unica soluzione per il sistema lineare associato e tale matrice prende il nome di matrice inversa di Leontief:

$$\Psi \equiv (1-\Omega)^{-1} = I + \Omega + \Omega^2 + \cdots \tag{55}$$

Quest'ultima registra ogni esposizione diretta e indiretta nella catena di produzione. Gli elementi che compongono Ψ sono i fattori moltiplicativi che misurano l'effetto economico di una variazione nella produzione di un singolo settore. In al-

2. Se valgono le condizioni del Teorema di Hawkins-Simons è garantita l'esistenza di un vettore output non negativo che risolve la relazione d'equilibrio nel modello input-output in cui la domanda è uguale all'offerta.

tre parole, se si dovesse verificare un eccesso di domanda in un particolare settore questo per essere pareggiato necessiterebbe di un aumento della domanda dei beni intermedi prodotti dalle altre industrie, che a loro volta richiederebbero l'aumento di quella di altri input scaturendo così un effetto di propagazione lungo tutta la catena produttiva.

4.6 Pesi di Domar

Definiamo con λ_i la quota di mercato dell'industria i-esima sulla ricchezza totale prodotta dell'economia (PIL):

$$\lambda_i = \frac{p_i y_i}{\sum_{i\in\mathcal{N}} p_i c_i} = \frac{p_i y_i}{E}, \qquad \sum\nolimits_{i\in\mathcal{N}} \lambda_i \geq 1 \tag{56}$$

e con λ_i la quota di PIL imputabile al fattore f

$$\lambda_f = \frac{w_f L_f}{\sum_{f\in\mathcal{G}} w_f L_f} = \frac{w_f L_f}{E}, \qquad \sum\nolimits_{f\in\mathcal{G}} \lambda_f = 1 \tag{57}$$

I parametri λ_i rappresentano le percentuali di vendita settoriali, nei problemi di contabilità nazionale e di statistica multifattoriale produttiva prendono il nome di *Domar weights*.

Dall'equilibrio generale sul mercato dei beni possiamo derivare la seguente identità contabile:

$$p_i y_i = p_i x_{0i} + \sum\nolimits_{j\in\mathcal{N}} p_i x_{ji} = \lambda_i E = \Omega_{0i} E + \sum_{j\in\mathcal{N}} \Omega_{ij} \lambda_j E \tag{58}$$

che mette in relazione le quote dei fattori produttivi con la matrice inversa di Leontief

$$\lambda_f = \Psi_{0f} = \sum_{j\in\mathcal{N}} \Omega_{0j} \Psi_{jf} \tag{59}$$

dove $\Omega_{oj} = (p_j\ c_j)/E$ è la quota del consumo del bene j da parte delle famiglie.

4.7 Teorema di Hulten

Dall'approssimazione del primo ordine del problema delle imprese e dal vincolo tecnologico (44) otteniamo la relazione:

$$d \log Y \approx \sum_{i \in \mathcal{N}} \lambda_i d \log A_i + \sum_{f \in \mathcal{G}} \lambda_f d \log L_f \tag{60}$$

$$= \sum_{i \in \mathcal{N}} \lambda_i d \log A_i + \sum_{f \in \mathcal{G}} \lambda_f d \log \bar{L}_f + \sum_{f \in \mathcal{L}} \lambda_f \min\{d \log \lambda_f + d \log E - d \log \bar{L}_f, 0\}. \tag{61}$$

La prima uguaglianza implica che per questa economia vale una versione del Teorema di Hulten (1978). Tale teorema dice che per un'economia efficiente e sotto assunzioni minimali, l'approssimazione lineare del primo ordine di un TFP shock è uguale alla sommatoria delle variazioni della produttività avvenute a livello settoriale, $d \log A_i$, ponderate per i rispettivi pesi di Domar. L'equazione (61) deriva dalla scomposizione dell'ultimo termine della (60). I cambiamenti nei fattori di capitale $f \in K$ sono esogeni e poiché $K \subseteq S$ le variazioni nelle quantità risultano $d \log L_f = d \log \bar{L}_f$, mentre le variazioni dei fattori $f \in L$ avvengono endogenamente

$$d \log L_f = \min\{d \log \lambda_f + d \log E, d \log \bar{L}_f\} = \min\{d \log L_f, d \log \bar{L}_f\} \leq d \log \bar{L}_f .$$

Si ricordi che i mercati del lavoro $f \in L$ sono *demand-constrained*, il che implica una variazione nulla dei salari $d \log w_f = 0$ e una variazione per le quantità pari a $d \log L_f = d \log \lambda_f + d \log E$ se e solo se la variazione della spesa nominale per quel determinato fattore è minore della riduzione della sua quantità potenziale $d \log \bar{L}_f$. La variazione dell'output totale $d \log Y$ può essere quindi scomposta in due variazioni distinte: $\sum_{i \in \mathcal{N}} \lambda_i d \log A_i + \sum_{f \in \mathcal{G}} \lambda_f d \log \bar{L}_f$ misura la variazione dell'output potenziale, che corrisponderebbe alla variazione dell'output in una versione neoclassica del modello con flessibilità dei salari; $\sum_{f \in \mathcal{L}} \lambda_f \min\{d \log \lambda_f + d \log E - d \log \bar{L}_f, 0\}$ cattura una variazione negativa dell'output gap che si verificherebbe in una versione neokeynesiana del modello, nel quale a causa della presenza di rigidità nominali si formano recessioni inefficienti $\{d \log L_f - d \log \bar{L}_f < 0\}$ nei settori non soggetti alle restrizioni.

$$\begin{aligned} &\sum_{f \in \mathcal{L}} \lambda_f \min\{d \log \lambda_f + d \log E - d \log \bar{L}_f, 0\} \\ &\quad = \sum_{f \in \mathcal{L}} \lambda_f \min\{d \log w_f + d \log L_f - d \log E + d \log E - d \log \bar{L}_f, 0\} \\ &\quad = \sum_{f \in \mathcal{L}} \lambda_f \min\{d \log L_f - d \log \bar{L}_f , 0\}. \end{aligned}$$

4.8 Non Linearità

Dal Teorema di Hulten rappresentato dall'equazione (60) si deduce che uno shock che colpisce la composizione interna della domanda finale, $d\ log\ \omega_O$, non ha alcun effetto del primo ordine sulla variazione dell'output $d\ log\ Y$. Tuttavia, in presenza di shocks tecnologici $d\ log\ A_i$ e sugli input $d\ log\ L_f$, se si dovesse introdurre nel modello un fattore esogeno che modificasse la composizione intersettoriale della domanda, allora, a livello di effetti del secondo ordine queste variazioni sarebbero rilevanti poiché indurrebbero variazioni delle quote di PIL dei fattori e delle industrie:

$$d\log Y \approx \underbrace{\sum_{i\in\mathcal{N}} \lambda_i\, d\log A_i}_{shock\ tecnologico} + \underbrace{\sum_{f\in\mathcal{G}} \lambda_f\, d\log L_f}_{shock\ d'offerta} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathcal{N}} \lambda_i\, d\log\lambda_i\, d^2\log A_i + \frac{1}{2}\sum_{f\in\mathcal{G}} \lambda_f\, d\log\lambda_f\, d^2\log L_f}_{riallocazione\ delle\ risorse} \quad (62)$$

Ciò avviene perché modifiche interne nella ripartizione della domanda finale provocano un effetto ambiguo sulla variazione dell'output $d\ log\ Y$, provocandone un percorso instabile. Ad esempio, la riduzione dell'output $d\ log\ Y$ provocata da una minor disponibilità dei fattori $d\ log\ L_f < o$ potrebbe essere ancor più gravosa se la domanda finale delle famiglie variasse in favore di quei beni che utilizzano direttamente ed indirettamente quel fattore nel proprio processo produttivo. Estendendo la versione del Teorema di Hulten (60) all'approssimazione del secondo ordine (o ordini superiori), entrerebbero quindi in gioco dei fenomeni di non linearità nelle variazioni dell'output $d\ log\ Y$. Tali fenomeni dipendono dalla risposta dei pesi di Domar delle industrie λ_i e degli input λ_f agli shocks che colpiscono l'economia. Gli effetti delle approssimazioni del secondo ordine sono dati dalle interazioni degli shocks con le variazioni dei Pesi di Domar che avvengono in equilibrio a causa degli shocks. Per esempio, la variazione dell'output causata da una riduzione dell'offerta potenziale di un fattore, $d\ log\ \bar{L}_f < o$, è di una entità non solo proporzionale alla dimensione dello shock o alla quota di PIL di quel determinato fattore, ma anche dalla possibilità che proprio a causa di quello shock la quota di reddito di quel particolare input, così come quella degli altri, possa aumentare. Lo studio dei cambiamenti nelle quote $d\ log\ \lambda_i$ "e" $d\ log\ \lambda_f$ avviene tramite un sistema di equazioni di propagazione che mette in relazione tramite un meccanismo a cascata tutti gli agenti facenti parte del sistema economico. Tali equazioni dipendono da tutti gli shocks (incluso quello che modifica la composizione intersettoriale della domanda $d\ log\ \omega_O$) e dalla struttura disaggregata dell'economia (espressa tramite la matrice input-output, l'elasticità di sostituzione dei consumatori/produttori e la distribuzione iniziale della ricchezza), che pertanto torna ad essere rilevante. Quindi, i cambiamenti nei rapporti di spesa tra i vari settori e negli input giocano un ruolo cruciale nel tracciare le principali variabili endogene come l'output, l'occupazione e l'inflazione, innescando tuttavia fenomeni di non linearità nelle variazioni di questi aggregati.

4.9 Equazioni di Propagazione

Seguendo la trattazione di Baqaee e Farhi (2020*b*), si supponga che la legge di produzione abbia un'elasticità di sostituzione costante uniforme tra tutti i produttori e inferiore all'unità ($\theta < 1$):

$$\frac{y_i}{\bar{y}_i} = \frac{A_i}{\bar{A}_i}\left(\sum_{j\in\mathcal{N}+\mathcal{G}} \bar{\omega}_{ij}\left(\frac{x_{ij}}{\bar{x}_{ij}}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \tag{63}$$

Per $x_{ij} \in N + G$ si intende indistintamente tutti gli input (beni intermedi e fattori produttivi) utilizzati dall'industria *i*-esima nel processo produttivo, mentre le variabili sopralineate determinano i valori normalizzati di stato stazionario.

Si denoti la f-esima colonna della matrice inversa di Leontief con $\Psi_{(f)}$ e sia $Cov_{\Omega(0)}(\cdot,\cdot)$ la covarianza di due vettori di dimensione $1+N+G$ ponderati per le quote di budget delle famiglie $\Omega^{(0)}$. Analogamente, si indichi con $E_{\Omega(0)}[\cdot]$ l'operatore aspettativa di un vettore che utilizza come distribuzione di probabilità le quote di budget delle famiglie. Si supponga, invece, che le preferenze delle famiglie siano riassunte da una funzione CES come l'equazione (39), ma lineare nelle deviazioni (logaritmiche) dai rispettivi valori di stato stazionario e con elasticità di sostituzione unitaria ($\theta = 1$). Dall'equazione (60) si può ricavare un sistema di equazioni di propagazione delle variazioni relative dei prezzi dei beni intermedi:

L'equazione (64) descrive come cambiamenti nei prezzi degli input si propagano nel sistema attraverso i costi sostenuti dai vari produttori. Per esempio, uno shock

$$d\log p_k - d\log E \approx -\sum_{i\in\mathcal{N}} \Psi_{ki} d\log A_i + \sum_{f\in\mathcal{G}} \Psi_{kf}\, d\log\left(d\log\lambda_f - d\log L_f\right). \tag{64}$$

di produzione negativo $d\log A_i$ sul produttore $i \in$ N può provocare un aumento dei prezzi dei beni intermedi prodotti da $k \in N$ direttamente in proporzione alla spesa del produttore *k* per i beni intermedi prodotti da *i* e indirettamente tramite Ψ_{ki}. In modo simile, un aumento del prezzo del fattore di produzione $f \in G$, $d\log w_f = d\log\lambda_f - d\log L_f - d\log E$, provoca un incremento di prezzo del bene intermedio k in modo diretto, secondo l'esposizione del produttore *k* sul fattore *f*, e in modo indiretto per via dell'effetto di propagazione riassunto da Ψ_{kf}. Analogamente, si possono approssimare i cambiamenti delle quote di reddito dei vari settori $d\log\lambda_k$ in un sistema di equazioni di propagazione che dipendono dalla composizione della domanda finale $d\log\omega_0$ e dai prezzi relativi $-d\log p$,

Specializzando il sistema di produzione tale che $k \in N = f \in G$ e combinando

$$d\log\lambda_k = Cov_{\Omega^{(0)}}\left(d\log\omega_0, \Psi_{(k)}\right) + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lambda_j(\theta-1) Cov_{\Omega^{(j)}}\left(-d\log p, \frac{\Psi_{(k)}}{\lambda_k}\right). \tag{65}$$

le equazioni di propagazione (64) e (65), dopo alcune manipolazioni algebriche si ottiene un sistema di *f* equazioni in cui le variazioni delle quote di mercato dei fattori f sono riassumibili dall'equazione log-lineare:

$$d\log\lambda_f = \frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{1}{\theta}Cov_{\Omega^{(0)}}\left(d\log\Omega^{(0)},\Psi_{(f)}\right) - \frac{1-\theta}{\theta}d\log L_f$$

$$-\frac{1}{\lambda_f}\frac{1-\theta}{\theta}\sum\nolimits_{k\in\mathcal{G}}\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(k)}\Psi_{(f)}\right)(d\log\lambda_k - d\log L_k). \quad (66)$$

Dove i cambiamenti nelle quantità dei fattori sono dati da

$$d\log L_f = \begin{cases} d\log\bar{L}_f, & per\ f\in\mathcal{K}, \\ \min\{d\log\lambda_f + d\log E, d\log\bar{L}_{f,}\}, & per\ f\in\mathcal{L}. \end{cases}$$

L'equazione (66) descrive le variazioni endogene delle quote di reddito dei fattori produttivi in equilibrio. Con $\theta \neq 1$ la matrice dei coefficienti input-output diventa rilevante per ogni tipo di shock che colpisce l'economia. Nel caso in cui $\theta = 1$ si è in un mondo Cobb-Douglas dove le quote $d\log\lambda_f$ sono stabili e la struttura disaggregata dell'economia è ininfluente. I primi due termini della (66) mostrano come variano le quote λ_f al verificarsi di uno shock di domanda e di offerta che mantiene inalterato il rapporto tra la variazione istantanea relativa del costo del fattore e del PIL. Il primo termine a destra dell'uguale cattura l'effetto che provoca una variazione della composizione intersettoriale della domanda $d\log\Omega^{(0)}$ sulle quote di reddito dei fattori $d\log\lambda_f$. Se la domanda finale si dovesse modificare in favore dei beni prodotti utilizzando il fattore *f*, allora $Cov_{\Omega(0)}(d\log\Omega^{(0)},\Psi_{(f)})>0$, e la quota del fattore *f* aumenterebbe $d\log\lambda_f > 0$. Il secondo termine implica che una variazione positiva dell'offerta dell'input f provoca una riduzione della spesa verso tale input e quindi una riduzione della sua quota di mercato. Ciò è spiegabile in quanto una maggior disponibilità dell'input, $d\log L_f > 0$, provocherebbe una riduzione del suo prezzo e quindi un aumento della sua domanda; tuttavia, data la presenza di complementarità nella rete di produzione i beni intermedi non sono facilmente sostituibili tra loro, per cui l'impiego dell'input *f* non varierà in proporzione sufficiente per controbilanciare la minor spesa causata dalla riduzione di prezzo. La seconda riga dell'equazione (66) esprime come avvengono le variazioni nelle quote di reddito $d\log\lambda_f$ quando ci sono delle variazioni nelle remunerazioni dei fattori. Quando la remunerazione del fattore *k* cresce più rapidamente del PIL nominale, $d\log w_k - d\log E = d\log\lambda_f - d\log L_f > 0$, allora, data la presenza di complementarità, l'aumento del prezzo relativo di k reindirizzerà la spesa dal fattore *f* al fattore *k*. La magnitudo di questo effetto è tanto più forte quanto più è simile la catena di produzione dei beni domandati dalle famiglie $E_{\Omega(0)}(\Psi_{(k)}\Psi_{(f)}) \geq 0$. Ciò deriva dal fatto che $E_{\Omega(0)}(\Psi_{(k)}\Psi_{(f)})$ è il prodotto tra due vettori non negativi $\Psi_{(k)}\Psi_{(f)}$, e questi due vettori catturano rispettivamente la catena di produzione (aggiustata) di ogni bene prodotto dall'economia che fa affidamento sul fattore *k* e *f*. Intuitivamente, quando $E_{\Omega(0)}(\Psi_{(k)}\Psi_{(f)})$ è grande e positivo significa che i produttori che utilizzano intensivamente *k* fanno anche forte affidamento sul fattore *f*. Allora, un aumento del prezzo relativo di *k*, in presenza di complementarità, farà diminuire la quota di spesa sul fattore *f*. Diversamente, nel caso in cui i vettori $\Psi_{(k)}$ $\Psi_{(f)}$ sono ortogonali i fattori corrispettivi avranno una domanda indipendente, e uno shock che colpisce il fattore k non avrà diretta influenza sulla quota di reddito del fattore *f*.

4.10 Moltiplicatori

Si supponga che l'economia venga colpita temporaneamente da una crisi pandemica che implichi elementi di uno shock di domanda $d\log\zeta$ e di offerta $d\log\bar{L}_f$ aggregata e da uno shock che modifichi la composizione interna della domanda $d\log\omega_0 = d\log\Omega^{(0)}$. Tale ipotesi, sembrerebbe essere del tutto coerente con gli effetti macroeconomici scaturiti dal coronavirus. Si ipotizzi esistere un solo fattore di capitale, quindi un solo input *supply-constrained*, mentre tutti gli altri fattori $f \in L \equiv D$ sono *demand-constrained*. Allora, sostituendo $d\log L_{f\in L} = d\log\lambda_f + d\log E$ nell'equazione (65), le variazioni delle quote di reddito dei fattori lavoro saranno riassunte da:

La prima parte dell'equazione è identica a quanto visto per la (65), la parte centrale esprime gli effetti diretti ed indiretti (tramite la catena di produzione) di una

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta}d\log\lambda_k &= \frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{1}{\theta}Cov_{\Omega^{(0)}}\left(d\log\omega_0\,,\Psi_{(k)}\right)\\&\quad-\frac{1-\theta}{\theta}d\log E+\frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{1-\theta}{\theta}\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(k)}\right)d\log E\\&\quad-\frac{1}{\lambda_k}\frac{1-\theta}{\theta}\sum\nolimits_{f\in\mathcal{S}}\left[\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(k)}\right)\right]\left(d\log\lambda_k-d\log\bar{L}_f\right)\end{aligned}\tag{67}$$

variazione della spesa nominale, infine l'ultima parte mostra l'effetto sulle quote di reddito dei fattori in virtù di una variazione della remunerazione dell'unico fattore di capitale. Moltiplicando ogni membro per $\lambda_k\cdot\theta$ si ottiene,

$$\begin{aligned}\lambda_k d\log\lambda_k &= Cov_{\Omega^{(0)}}\left(d\log\omega_0\,,\Psi_{(k)}\right)\\&\quad-(1-\theta)\lambda_k d\log E+(1-\theta)\,\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(k)}\right)d\log E\\&\quad-(1-\theta)\left[\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{S})}\Psi_{(k)}\right)\right]\left(d\log\lambda_{\mathcal{S}}-d\log\bar{L}_{\mathcal{S}}\right),\end{aligned}$$

e aggregando tutti i fattori *demand-constrained* si giunge a

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{k\in\mathcal{D}}\lambda_k d\log\lambda_k &= \lambda_{\mathcal{D}}d\log\lambda_{\mathcal{D}}\\&= Cov_{\Omega^{(0)}}\left(d\log\omega_0\,,\Psi_{(\mathcal{D})}\right)\\&\quad-(1-\theta)\left[\lambda_{\mathcal{D}}-\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left({\Psi^2}_{(\mathcal{D})}\right)\right]d\log E-(1-\theta)\,\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{S})}\Psi_{(\mathcal{D})}\right)\left(d\log\lambda_{\mathcal{S}}-d\log\bar{L}_{\mathcal{S}}\right)\end{aligned}$$

dove

$$\lambda_{\mathcal{D}} = \sum_{f\in\mathcal{D}} \lambda_f = 1-\lambda_{\mathcal{S}},\ \Psi_{\mathcal{D}} = \sum_{f\in\mathcal{D}} \Psi_{(f)} = 1-\Psi_{(\mathcal{S})} \text{ e } \lambda_{\mathcal{D}} = \mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\right)$$

Rimanipolando algebricamente l'equazione, in particolare

$$\begin{aligned}\left[\lambda_{\mathcal{D}} - \mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi^2{}_{(\mathcal{D})}\right)\right] &= \left[\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\right) - \mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\left(1-\Psi_{(\mathcal{S})}\right)\right)\right] \\ &= \left[\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\right) - \mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})} - \Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(\mathcal{S})}\right)\right] = \mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(\mathcal{S})}\right)\end{aligned}$$

e sfruttando il fatto che i movimenti delle quote di reddito dei fattori lavoro e del fattore capitale si muovono in maniera diametralmente opposta, $\lambda_D\, d \log \lambda_D = -\lambda_S\, d \log \lambda_S$, si ha la relazione:

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathcal{D}} d\log\lambda_{\mathcal{D}} &= Cov_{\Omega^{(0)}}\left(d\log\omega_0, \Psi_{(\mathcal{D})}\right) - (1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(\mathcal{S})}\right) d\log E \\ &+ (1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{S})}\Psi_{(\mathcal{D})}\right)\frac{1}{\lambda_{\mathcal{S}}}\lambda_{\mathcal{D}} d\log\lambda_{\mathcal{D}} + (1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{S})}\Psi_{(\mathcal{D})}\right) d\log\bar{L}_{\mathcal{S}}.\end{aligned}$$

Portando a sinistra dell'uguale il termine che moltiplica $\lambda_D\, d \log \lambda_D$ e raccogliendolo a fattor comune abbiamo

$$\begin{aligned}\left[1-(1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{S})}\Psi_{(\mathcal{D})}\right)\frac{1}{\lambda_{\mathcal{S}}}\right]\lambda_{\mathcal{D}} d\log\lambda_{\mathcal{D}} &= Cov_{\Omega^{(0)}}\left(d\log\omega_0, \Psi_{(\mathcal{D})}\right) \\ &- (1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(\mathcal{S})}\right) d\log E + (1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{S})}\Psi_{(\mathcal{D})}\right) d\log\bar{L}_{\mathcal{S}}.\end{aligned}$$

Infine, dividendo entrambi i membri per il fattore moltiplicativo nelle parentesi quadre si giunge a:

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathcal{D}} d\log\lambda_{\mathcal{D}} = &\frac{Cov_{\Omega^{(0)}}\left(d\log\omega_0, \Psi_{(\mathcal{D})}\right)}{1-(1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{S})}\Psi_{(\mathcal{D})}\right)\frac{1}{\lambda_{\mathcal{S}}}} - \frac{(1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(\mathcal{S})}\right) d\log E}{1-(1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{S})}\Psi_{(\mathcal{D})}\right)\frac{1}{\lambda_{\mathcal{S}}}} \\ &+ \frac{(1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{S})}\Psi_{(\mathcal{D})}\right) d\log\bar{L}_{\mathcal{S}}}{1-(1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{S})}\Psi_{(\mathcal{D})}\right)\frac{1}{\lambda_{\mathcal{S}}}}.\end{aligned}$$

Tenendo presente che per quest'economia vale una versione del Teorema di Hulten, per cui la variazione totale dell'output è uguale alle variazioni settoriali ponderate per il corrispettivo peso di Domar

$$d\log Y = \lambda_{\mathcal{S}} d\log\bar{L}_{\mathcal{S}} + \lambda_{\mathcal{D}} d\log E + \lambda_{\mathcal{D}} d\log\lambda_{\mathcal{D}}, \tag{68}$$

e sostituendo quanto trovato precedentemente per le variazioni delle quote di reddito dei fattori $\lambda_D\, d \log \lambda_D$, si ottiene finalmente una relazione lineare che lega la variazione dell'output totale $d \log Y$ ai singoli shocks ipotizzati [$d \log \bar{L}_S$, $d \log E$, $d \log \omega_O$]:

$$\begin{aligned}d\log Y = &\left[\lambda_{\mathcal{S}} + \frac{(1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(\mathcal{S})}\right)\lambda_{\mathcal{S}}}{\lambda_{\mathcal{S}} - (1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(\mathcal{S})}\right)}\right] d\log\bar{L}_{\mathcal{S}} \\ &+ \left[\lambda_{\mathcal{D}} - \frac{(1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(\mathcal{S})}\right)\lambda_{\mathcal{S}}}{\lambda_{\mathcal{S}} - (1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(\mathcal{S})}\right)}\right] d\log E + \frac{\lambda_{\mathcal{S}} Cov_{\Omega^{(0)}}\left(d\log\omega_0, \Psi_{(\mathcal{D})}\right)}{\lambda_{\mathcal{S}} - (1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(\mathcal{S})}\right)}\end{aligned} \tag{69}$$

dove $0 < \lambda_{\mathcal{S}} - (1-\theta)\mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{D})}\Psi_{(\mathcal{S})}\right) < 1$. $\lambda_{\mathcal{S}} = \mathbb{E}_{\Omega^{(0)}}\left(\Psi_{(\mathcal{S})}\right)$, $0 \leq \theta < 1$ e $\Psi_{(\mathcal{D})} = 1 - \Psi_{(\mathcal{S})}$.

Il primo termine dell'equazione (69) cattura l'effetto di uno shock d'offerta $d \log \bar{L}_S$, mentre il secondo e terzo termine colgono rispettivamente l'effetto di uno shock di domanda aggregata $d \log E$ (che può essere sia esogeno che endogeno) e intersettoriale $d \log \omega_O$. Uno shock negativo d'offerta sui fattori *supply-constrained* riduce l'output in modo diretto, proporzionalmente alla quota di reddito $\lambda_S\, d \log \bar{L}_S$, e in modo indiretto per via delle complementarità. Quando le catene di produzione tra i fattori $f \in S$ e $k \in D$ sono simili, i produttori fanno ampio affidamento su entrambi i fattori. Se uno shock dovesse colpire la quantità dei fattori *S*, a causa delle complementarità nel processo produttivo le imprese sarebbero costrette a spostare una parte di spesa che prima era allocata sui fattori *D* sui fattori *S*, causando una recessione di natura keynesiana nel mercato dei fattori *D* che deprimerebbe ancor di più l'output totale. Quindi, uno shock d'offerta $d \log \bar{L}_S$ in un'economia in cui sono presenti meccanismi di complementarità tra gli input viene amplificato, inasprendo la portata della recessione. Il secondo termine dell'equazione (69) coglie l'effetto di uno shock di domanda aggregata $d \log E$. Esso può avvenire sia in maniera esogena, $d \log \zeta$, che in maniera endogena, $d \log \theta$. In entrambi i casi, la caduta della spesa nominale provoca una riduzione lineare dell'output di un'entità pari a $\lambda_d \log E$, poiché riduce in maniera proporzionale l'occupazione nei fattori $f \in L \equiv D$. Tuttavia, in virtù delle rigidità salariali, quando si verifica uno shock sulla spesa nominale il prezzo dei fattori S si riduce maggiormente rispetto al prezzo dei fattori *D*, e per via delle complementarità gli imprenditori convoglieranno quote di spesa dai primi ai secondi, stabilizzando l'occupazione nei fattori *demand-constrained*. L'ultimo addendo dell'equazione (69) spiega come una variazione nelle preferenze delle famiglie possa influenzare le fluttuazioni dell'output totale $d \log Y$. Infatti, diversamente dagli shock aggregati tipici dei modelli neokeynesiani, in un'economia che prefigura complementarità tra i consumatori/produttori, uno shock intersettoriale $d \log \omega_O$ ha un effetto moltiplicativo sulla variazione dell'output. Si consideri ad esempio un cambio nelle preferenze iniziali delle famiglie che ha l'effetto di provocare una riduzione nella domanda dei fattori *demand-constrained*. Ciò implicherebbe analiticamente $Cov_{\Omega(0)} = (d \log \Omega^{(0)}, \Psi_{(D)}) < 0$. Tale riduzione, si rifletterebbe in un conseguente aumento della domanda dei fattori $f \in S$, $Cov_{\Omega(0)}(d \log \Omega^{(0)}, \Psi_{(S)}) = - Cov_{\Omega(0)}(d \log \Omega^{(0)}, \Psi_{(D)}) > 0$. L'aumento della domanda degli input $k \in S$ provocherebbe quindi un innalzamento dei relativi prezzi, che per via di complementarità nella catena di produzione si risolverebbe in uno spostamento delle quote di reddito che prima erano in favore dei fattori *D* verso i fattori *S*, generando così maggior disoccupazione nei mercati lavorativi *D* aggravando la situazione di recessione.

CONCLUSIONE

Questo lavoro si prefiggeva l'ambizioso obiettivo di descrivere attraverso un'analisi economica positiva gli effetti della pandemia da coronavirus, mettendo al centro della discussione il ruolo delle complementarità tra i beni acquistati dalle famiglie e i fattori produttivi utilizzati nelle imprese. Per raggiungere questo scopo, è stato necessario utilizzare una modellistica che prevedesse un'economia multisettoriale, in cui le decisioni di spesa e di produzione sono prese in modo da massimizzare delle funzioni d'utilità intertemporale. L'utilizzo di tale approccio teorico basato sulla microfondazione delle variabili macroeconomiche, innestato in una economia multisettoriale, è la vera novità che il Covid-19 ha portato in campo letterario. L'integrazione di una metodologia moderna come quella DSGE in un framework più classico come i modelli multisettoriali ha aperto una nuova strada nella modellistica, in quanto grazie all'ausilio di questo *setup* è possibile simulare in maniera precisa, elegante e semplice come avvengono le variazioni nelle relazioni intersettoriali del sistema economico. Tuttavia, per rendere più semplice e chiara la trattazione, si è ipotizzata una relazione univoca tra bene e industria che ha implicato una forte specializzazione del sistema economico. Sebbene oggigiorno esistano diversi monopoli che forniscono svariate tipologie di beni e servizi, anche molto diversi tra loro, l'ipotesi avanzata non dovrebbe aver fatto allontanare troppo il modello dalla realtà, mantenendo dunque inalterata la bontà dei risultati. Nella prima sezione, in un contesto di completezza/incompletezza dei mercati e rigidità nominali, si sono derivati diversi limiti inferiori per il livello d'elasticità di sostituzione intersettoriale, i quali, se raggiunti, darebbero vita ad un meccanismo di propagazione endogeno che causerebbe una caduta della domanda aggregata addirittura superiore allo shock originatosi sul lato dell'offerta. Tale effetto di *demand spillover* risulta essere maggiore tanto è maggiore la presenza di vincoli di liquidità e restrizioni al credito nel sistema. Questa condizione, che in alcuni casi è stata usata iperbolicamente per fini teorici, è necessaria per rappresentare l'economia nel modo più veritiero possibile, dato che sembra ormai chiara l'esistenza di un'eterogeneità tra gli agenti economici. Inoltre, essa dovrebbe essere inserita nei modelli con l'ulteriore scopo di trovare soluzioni di *policy* che tengano conto di questo aspetto d'incompletezza dei mercati. Infatti, è molto plausibile che tali inefficienze abbiano inasprito le condizioni economico-finanziarie di molte famiglie e piccole-medie imprese, che già gravate della riduzione o del totale azzeramento dell'attività lavorativa si sono ritrovate in una situazione di temporanea difficoltà nel far fronte al loro fabbisogno corrente. Nella sezione successiva, invece, nell'ambito di un'estesa analisi input-output e di una più complessa funzione di produzione, sono stati analizzati quelli che sono gli effetti delle complementarità tra gli input di produzione. Essi, insieme alle particolari implicazioni settoriali dello shock da coronavirus, risultano essere responsabili sia di un effetto moltiplicativo dello shock d'offerta sia di un effetto "stabilizzatore" di una perturbazione (esogena o endogena) della spesa aggregata. La pandemia ha mostrato come non solo non sia irrilevante una riallocazione interna delle risorse, ma anche svelato come shocks sulla composizione disaggregata della domanda o TFP shocks sui fattori produttivi siano fondamentali per indirizzare la traiettoria dell'output verso un nuovo punto di equilibrio. Le variazioni nei Pesi di Domar non sono quindi neutrali alle fluttuazioni dell'output come sostenuto nel Teorema di Hulten (1978), tutt'altro, esse giocano un ruolo fondamentale nel plasmare i moltiplicatori economici. Pertanto, l'utilizzo di leggi di produzione ad elasticità unitaria come le funzioni Cobb-Douglas mal si prestano a rappresentare i meccanismi interni alla struttura tecnica, dato che implicano l'assenza di variazioni nei rapporti d'utilizzo degli input. Dunque, affrontare la crisi del coronavirus senza considerare le interconnessioni e le complementarità del sistema economico fornirebbe un'immagine distorta della realtà. L'interdipendenza dei settori è una delle caratteristiche fondamentali dell'economia moderna, un fenomeno così *disruptive* come una pandemia può alterare le catene di valore preesistenti e modificarne i valori di equilibrio generando meccanismi distorsivi e non lineari che non verrebbero colti dai moderni modelli neokeynesiani.

BIBLIOGRAFIA

Baqaee, D., & Farhi, E. (2019). The Macroeconomic Impact of Microeconomic Shocks: Beyond Hulten's Theorem. *Econometrica*.

Baqaee, D., & Farhi, E. (2020a). Nonlinear Production Networks with an Application to the Covid-19 Crisis. *NBER Working papers*.

Baqaee, D., & Farhi, E. (2020b). Supply and Demand Disaggregated Keynesian Economies with an Application to the Covid-19 Crisis. *NBER Working papers*.

Baqaee, D., & Farhi, E. (2021). Keynesian Production Networks and The Covid-19 Crisis: A Simple Benchmark. *NBER Working papers*.

Brinca, P., Duarte, J., & Faria-e-castro, M. (2020). Is The Covid-19 Pandemic a Supply or a Demand Shock? *Economic Synopses*.

Coibion, O., Gorodnichenko, Y., & Weber, M. (2020). Labor Markets During the Covid-19 Crisis: A Preliminary View. *NBER Working papers*.

Guerrieri, V., Lorenzoni, G., Straub, L., & Werning, I. (2020). Macroeconomic Implications of Covid-19: Can negative supply shocks cause demand shortages? *NBER Working papers*.

Leontief, W. (1986). *Input-Output economics*. New York: Oxford University Press.